

Kai Neergård

Oktupolsvingninger i lige-lige deformerede kerner.

Besvarelse af specialeopgave til  
naturvidenskabelig embedseksamen,

Københavns universitet,

foråret 1969.

*Thesis for the degree  
candidatus scientiarum (MSc)  
University of Copenhagen 1969*

1. Indledning.

I det følgende skal omtales en foretaget beregning af oktupolspektrene for de lige-lige kerner i området  $152 \leq A \leq 192$  under antagelse af en mikroskopisk model med et Nilsson-midelpotential, pairingkraften og en modifikation af en isospinafhængig, sædvanlig oktupol-oktupolkraft, som skal beskrives nærmere nedenfor. Jeg har dels undersøgt den detaljerede struktur af disse spektre i lavenergiområdet, dels beregnet den samlede energifordeling af oktupoloscillatorstyrken. Soloviev m.fl. (henv. 1 - 5) samt Faessler og Plastino (henv. 6 - 9) har tidligere studeret de laveste oktupoleksitationer af lige-lige deformerede kerner i det her omhandlede område og området  $A \geq 228$ . Oktupolspektrene af de sfæriske kerner fra Ni til Pb'er undersøgt af Veje (henv. 10).

2. Model.

2.1. Formalisme.

I beregningerne er benyttet kvasipartikel-Random-Phase tilnærmelsen. Der gælder i denne et lineært lignings-

system for de greenske funktioner

$$G_{ij}(\epsilon) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0 | T \{ B_i^+(t) B_j(0) \} | 0 \rangle e^{i \epsilon t} dt, \quad (1)$$

som beskriver propagation af kombinationer af to-partikel-, partikel-hul- og to-hul-eksitationer fra den "super-ledende" grundtilstand  $|0\rangle$  (se f.eks. henv. 12 samt henv. 13).  $B_i$  og  $B_j$  er her linearkombinationer af operatorerne

$$a_\alpha^\pm, a_\alpha^\pm, a_\alpha^\pm, a_\alpha^\pm, \quad (2)$$

hvor  $\alpha, \beta, \dots$  betegner tilstande af den enkelte nukleon, og  $a_\alpha^\pm$  og  $a_\alpha^\pm$  er henholdsvis skabelses- og annihilationssoperatoren for en nukleon i tilstanden  $\alpha$ . Energierne af de kollektive eksitationer er bestemt som polerne af funktionerne (1), og residerne af de enkelte poler bestemmer overgangsmatrixelementerne af operatorerne  $B_i$ .

Jeg vil indføre notationen

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta}^+ = a_\alpha^+ \\ a_{\alpha\beta}^- = a_\beta^+ \end{cases}, \quad (3)$$

og sætte

$$B_{ab} = a_a^+ a_b^+, \quad (4)$$

hvor  $a, b, \dots$  repræsenterer indices  $\alpha, \beta, \dots$ ,  $\alpha', \beta', \dots$ . Det tidsordnede produkt  $T \{ a_\alpha(t) a_b(t) \}$  af operatorer til samme tid skal forudsættes defineret som

$$a_\alpha(t) a_b(t) = \langle 0 | a_\alpha a_b | 0 \rangle. \quad (5)$$

Med disse definitioner har ligningssystemet for de greenske funktioner (1) formen

$$G_{ab,cd}(\epsilon) = G_{ab,cd}^{(0)}(\epsilon) - \frac{i}{\hbar} \sum_{efgh} G_{ab,ef}^{(0)}(\epsilon) V_{efgh} G_{gh,cd}^{(0)}(\epsilon), \quad (6)$$

hvor  $G_{ij}^{(0)}(\epsilon)$  er funktionen  $G_{ij}(\epsilon)$  for et system beskrevet ved kvasipartikelhamiltonoperatoren

$$H_0 = \sum_n E_n b_n^+ b_n. \quad (7)$$

$b_n^+$  og  $b_n$  beskriver skabelse og annihilation af Bogoliubov-kvasipartikler. For "tidsomvendingslige" eller "-ulige" operatorer  $B_i$ , defineret ved

$$\tau B_i \tau^{-1} = \tau_i B_i, \quad \tau_i = \pm 1 \quad (8)$$

-  $\tau$  betegner tidsomvendingsoperatoren - gælder i intervalle mellem polerne af  $G_{ij}^{(0)}(\epsilon)$

$$G_{ij}^{(0)}(\epsilon) = \begin{cases} \sum_n \frac{(E_n + E_\alpha)(g_{\alpha\beta}^{(0)})^* g_{\alpha\beta}^{(0)}}{(E_n + E_\alpha)^2 - \epsilon^2} & \text{for } \tau_i \tau_j = 1, \\ \sum_n \frac{E(g_{\alpha\beta}^{(0)})^* g_{\alpha\beta}^{(0)}}{(E_n + E_\alpha)^2 - \epsilon^2} & \text{for } \tau_i \tau_j = -1. \end{cases} \quad (9)$$

Størrelserne  $g_{\alpha\beta}^{(0)}$  er for en operator

$$B_i = \sum_{ab} f_{ab}^{(i)} B_{ab} \quad (10)$$

defineret ved ligningen

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{(i)} = & (u_\alpha u_\beta - \tau_i v_\alpha v_\beta) (f_{\alpha\beta}^{(0)} - f_{\alpha\beta}^{(0)*}) \\ & - (u_\alpha v_\beta + \tau_i v_\alpha u_\beta) (f_{\alpha\beta}^{(0)*} - f_{\alpha\beta}^{(0)}), \end{aligned} \quad (11)$$

hvor  $u_\alpha$  og  $v_\alpha$  betegner koeficienterne i Bogoliubov-transformationen, og  $\bar{\alpha}$  er den til  $\alpha$  tidsomvendings-konjugerede enkeltpartikeltilstand. Specielt for operatorer

$$B_i = \sum_p f_{\alpha p} B_{\alpha p}, \quad (12)$$

gælder

$$g_{\alpha\beta}^{(1)} = (u_\alpha v_\beta + \bar{v}_\beta u_\alpha) f_{\alpha\beta}, \quad (13)$$

De i (6) indgående størrelser  $V_{ab,cd}$  er defineret ved følgende udtryk:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= V_{\gamma\delta, \alpha\beta} = \langle \alpha\beta | V_{pp} | \gamma\delta \rangle, \\ V_{\alpha\beta, \gamma\delta} &= -V_{\beta\alpha, \gamma\delta} = -V_{\gamma\delta, \alpha\beta}, \\ &= V_{\alpha\beta, \delta\gamma} = \langle \alpha\beta | V_{ph} | \delta\gamma \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

$$V_{ab,cd} = 0 \quad \text{for andre kombinationer af indices } a, b, c, d,$$

hvor  $V_{pp}$  er den effektive partikel-partikel-veksel-virkning og  $V_{ph}$  den effektive partikel-hul-veksel-virkning (jfr. henv. 13).  $V_{ph}$  er den samme vekselvirkning, som bevirker parkorrelationerne, og skal antages at kunne repræsenteres ved pairingkraften (jfr. aftenit 2.3). Matrikelementerne i (14) er antisymmetriserede matrikelementer.

For en deformert kerne med de for disse sædvanligvis antagne invariansegenskaber, kan ligningssystemet (6) reduceres til uafhængige ligningssystemer for eksitationer med en bestemt symmetri  $\nu^\pi$  defineret ved følgende ligninger for eksitationsoperatorerne  $B_i$ :

$$\left. \begin{aligned} [J_i, B_i] &= \nu_i B_i, \\ \pi B_i \pi &= \pi_i B_i, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

hvor  $J_i$  betegner den aksiale komponent af det totale impulsmoment, og  $\pi$  er paritetsoperatoren. Der skal her betragtes eksitationer med negativ paritet. Pairingkraften virker alene i  $O^+$ -kanalen, og der skal følge- lig ses bort fra matrikelementerne af  $V_{pp}$  ved løsning af ligningssystemet (6). Antages matrikelementerne af  $V_{ph}$  at have formen

$$\langle \alpha\beta | V_{ph} | \gamma\delta \rangle = - \sum_p \chi_p f_{\alpha\beta}^{(p)} (f_{\gamma\delta}^{(p)})^*, \quad (16)$$

er (6) da ekvivalent med ligningerne

$$G_{ij}(\epsilon) = G_{ij}^{(0)}(\epsilon) + \sum_p G_{ij}^{(p)}(\epsilon) \chi_p G_{pj}(\epsilon), \quad (17)$$

hvor

$$B_p = \sum_q f_{\alpha\beta}^{(p)} B_{\alpha\beta}. \quad (18)$$

Betrages specielt operatorer  $B_i$  og  $B_j$  givet ved (18), danner ligningerne (17) elementerne af en matrix-ligning

$$G(\epsilon) = G^{(0)}(\epsilon) + G^{(0)}(\epsilon) \chi G(\epsilon). \quad (19)$$

Matricen  $\chi$  er diagonal med elementer  $\chi_{pq} \delta_{pq}$ . (19) har løsningen

$$\underline{\underline{G}}(E) = (\underline{\underline{G}}^{(0)}(E)^{-1} - \frac{1}{\omega^2})^{-1} \quad (20)$$

Ekscitationsenergerne i en given  $\gamma^*$ -kanal kan beregnes som polerne af matrixfunktionen (20), der har dimension lig med antallet af led i (16), der virker i den pågældende kanal. Overgangsmatrixelementerne

$$\langle m | B_i | 0 \rangle \quad (21)$$

hvor  $m$  betegner en anslættet tilstand med energien  $E_m$ , er bestemt ved ligningerne

$$\langle 0 | B_i^\dagger | m \rangle \langle m | B_j | 0 \rangle = - \text{Res } G_{ij}(E_m) \quad (22)$$

Specielt gælder

$$|\langle m | B_i | 0 \rangle|^2 = - \text{Res } G_{ii}(E_m) \quad (23)$$

Residuerne af (20) giver direkte overgangsmatrixelementerne af operatorerne (18) ved benyttelse af (22). Når disse er bestemt, er matrixelementet af en vilkårlig operator givet ved ligningen

$$\langle m | B_i | 0 \rangle = \sum_p \langle m | B_p | 0 \rangle \chi_p G_p^{(0)}(E_m) \quad (24)$$

som følger af (17) ved at tage residuet i  $E_m$ .

## 2.2. Middelpotentialet.

Kernernes middelpotential repræsenteres ved Nilsson-potentialet (henv. 14)

$$V_N = V_{osc} - \alpha_{t_1} \hbar \omega (\ell \tilde{\ell} \cdot \tilde{s} - \mu_{t_1} (\tilde{\ell}^2 - \frac{1}{2} N(N+3))), \quad (25)$$

hvor

$$V_{osc} = \frac{1}{2} M (\omega_1^2 (x^2 + y^2) + \omega_0^2 z^2) \quad (26)$$

$\tilde{\ell}$  betegner det af Nilsson i henv. 15, app. A indførte transformerede baneimpulsmoment, således at hamilton-operatoren

$$H_N = \frac{\tilde{p}^2}{2M} + V_N \quad (27)$$

er ombyttelig med antallet  $N$  af oscillatorkvantér i  $V_{osc}$ . Det sidste led i parentesen efter  $\mu_{t_1}$ ,  $\frac{1}{2} N(N+3)$  er middelværdien af  $\tilde{\ell}^2$  i den pågældende  $N$ -skal.  $\omega_1$  og  $\omega_0$  er givet ved relationerne

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta} \quad (28)$$

og

$$\omega_1^2 \omega_0^2 = \omega^3 \quad (29)$$

hvor  $\beta$  er Bohr-Mottelson deformationsparametren.

Potentialet (25) reproducerer rækkefolgen af enkelpartikelniveauer i de enkelte deformerede områder af det periodiske system med et enkelt sæt af konstanter  $\alpha_{t_1}$  og  $\mu_{t_1}$  for hvert af disse områder (henv. 14). Ved at repræsentere samtlige de i beregningerne indgående enkelpartikeltilstande - d.v.s. også tilstandene med ener-

gier langt fra ferminiveauet - ved Nilsson-tilstande opnår jeg at arbejde med et fuldstændigt sst af enkeltpartikel-tilstande.

### 2.3. Pairingkraften.

Ved indførelse af Bogoliubov-transformationen tages par-korrelationerne i betragtning. Den effektive partikel-partikelvekselvirkning  $v_{pp}$  antages givet ved pairingkraften

$$\langle \gamma \beta | v_{pp} | \gamma \delta \rangle = - G_{t_1(\alpha)} \delta_{t_1(\alpha) t_2(\gamma)} \langle \rho | \bar{\alpha} \rangle \langle \bar{\gamma} | \delta \rangle, \quad (30)$$

som repræsenterer egenskaberne af en körtrækkende veksel-virkning mellem nukleoner med samme ladning (henv. 16).

$u_\alpha$  og  $v_\alpha$  bliver bestemt ved ligningerne

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{e_\alpha - \lambda_{t_1(\alpha)}}{E_\alpha} \right)} \\ v_\alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e_\alpha - \lambda_{t_1(\alpha)}}{E_\alpha} \right)} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

hvor  $e_\alpha$  betegner Nilsson-energiene. For kvasipartikel-energiene  $E_\alpha$  gælder

$$E_\alpha = \sqrt{(e_\alpha - \lambda_{t_1(\alpha)})^2 + A_{t_1(\alpha)}^2}. \quad (32)$$

Det komiske potential  $\lambda_{t_1}$  og energigabparameteren  $A_{t_1}$  op-fylder BCS-ligningerne

$$\frac{1}{2} \sum_{t_1(\alpha)=t_1} \left( 1 - \frac{e_\alpha - \lambda_{t_1(\alpha)}}{E_\alpha} \right) = \begin{cases} Z & \text{for } t_1 = \frac{1}{2}, \\ N & \text{for } t_1 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{t_1(\alpha)=t_1} \frac{1}{E_\alpha} = \frac{2}{G_{t_1}}, \quad (33)$$

(hvor  $N$  her betegner neutronantallet. Om udledelsen af ligningerne (31) - (33), se f. eks. henv. 17.)

### 2.4. Partikel-hulvekselvirkningen.

Der antages en effektiv partikel-hulvekselvirkning af formen

$$V_{ph}(1,2) = - \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \chi_\lambda Y_{\lambda_1}(\vec{r}_1) Y_{\lambda_2}(\vec{r}_2)^*, \quad (34)$$

hvor

$$\chi_\lambda = \chi_{\lambda_0} + 4\chi_{\lambda_1} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \equiv \chi_{\lambda_0} (1 - 4\alpha_{\lambda_1} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2). \quad (35)$$

$Y_{\lambda_1}(\vec{r})$  betegner et sfærisk harmonisk polynomium, og  $\vec{r} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , hvor

$$\vec{x} = \frac{\omega_1}{\omega} \vec{x}, \quad \vec{y} = \frac{\omega_2}{\omega} \vec{y}, \quad \vec{z} = \frac{\omega_3}{\omega} \vec{z}. \quad (36)$$

Isospinafhængigheden (35) er den samme som antaget i henv. 10 og 18. For at have så få parametre som muligt er der forudsat rotationsinvarians i isospinrummet af den effektive vekselvirkning.

Idet der skal ses bort fra udvekslingsleddet, har (34) matricelementerne

$$\langle \alpha \delta | V_{ph} | \beta \gamma \rangle = - \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \chi_{\lambda_2} f_{\alpha \beta}^{(\lambda_1 \lambda_2 \gamma)} (f_{\gamma \delta}^{(\lambda_1 \lambda_2 \beta)})^*, \quad (37)$$

hvor

$$f_{\alpha \beta}^{(\lambda_1 \lambda_2 \gamma)} = \langle \alpha | \sqrt{\frac{q_\pi}{2\pi\hbar}} Y_{\lambda_1}(\vec{2r}) Y_{\lambda_2}(\vec{2r}) | \beta \rangle. \quad (38)$$

(34) er i den sfæriske grønse identisk med den sædvanlige multipoles-multipolkraft. Man kan vurdere størrelsesordenen af koblingskonstanterne for den isospinuafhængige vekselvirkning (34) ( $a = 0$ ) ved en kvalitativ betragtning af samme art som benyttet i henv. 11 for multipoles-multipolekselvirkningen. Jeg vil vise, hvorledes argumentet følger i det deformerede tilfælde.

Middelpotentialet tilnærmes ved det harmoniske potential

$V_{osc}$ , som kan skrives

$$V_{osc} = \frac{1}{2} M\omega^2 \hat{r}^2, \quad (39)$$

hvor  $\hat{r} = |\vec{r}|$ . Tæthedsfunktionen

$$\xi(\vec{r}) = \sum_{s_1 s_2} \langle \vec{r} | s_1 \xi | \vec{r} | s_2 \rangle \quad (40)$$

forudsættes at have en tilsvarende form:

$$\xi(\vec{r}) = \xi(\hat{r}). \quad (41)$$

$\xi$  betegner her tæthedsooperatoren. Ved variationer af tætheden,  $\delta\xi$  vil vekselvirkningen (37) bevirke variationer i middelfeltet af formen

$$\delta V(\vec{r}) = \sum_{\lambda \mu} c_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}(\hat{r}), \quad (42)$$

hvor

$$c_{\lambda \mu} = -\chi_{\lambda} \hat{M}_{\lambda \mu}^*, \quad (43)$$

og

$$\hat{M}_{\lambda \mu} = \int \delta\xi(\vec{r}) Y_{\lambda \mu}(\hat{r}) d\tau. \quad (44)$$

Variationen (42) kan beskrives som en deformation af ekvivalentialfladerne af  $V_{osc}$ . Antages fladerne med lige tæthed at være deformerede på samme måde, følger

$$\delta\xi(\vec{r}) = \frac{1}{M\omega^2} \frac{d\xi(\hat{r})}{d\hat{r}} \sum_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}(\hat{r}) \quad (45)$$

som indsatt i (44) giver

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\lambda \mu} &= \frac{(-1)^{\lambda} c_{\lambda - \mu}}{M\omega^2} \int_0^\infty \hat{r}^{2\lambda + 1} \frac{d\xi(\hat{r})}{d\hat{r}} d\hat{r} \\ &= -\frac{(-1)^{\lambda} c_{\lambda - \mu}}{M\omega^2} (2\lambda + 1) \int_0^\infty \xi(\hat{r}) \hat{r}^{2\lambda} d\hat{r} \end{aligned} \quad (46)$$

$$= -(-1)^{\lambda} c_{\lambda - \mu} \frac{(2\lambda + 1) \langle \hat{r}^{2\lambda - 2} \rangle_A}{4\pi M\omega^2}$$

I (46) er udnyttet orthogonaliteten af kuglefunktionerne og den omstændighed, at transformationen (36) er volumenbevarende. Indsættes (46) i (43), følger

$$\chi_{\lambda} = \frac{4\pi M\omega^2}{(2\lambda + 1) \langle \hat{r}^{2\lambda - 2} \rangle_A} \quad (47)$$

En tilsvarende vurdering af koblingskonstanten i en oktopol-øktupolekselvirkning

$$V_{ph}(1,2) = - \sum_{\mu} \chi_{3\mu} Y_{3\mu}(\vec{r}_1) Y_{3\mu}(\vec{r}_2)^* \quad (48)$$

giver et langt mere kompliceret resultat, som afhænger af  $\mu$  og af deformationen:

$$\chi'_{30} = \frac{(1-\alpha)^4}{(1 + \frac{2}{5}\alpha + \frac{11}{5}\alpha^2)^2 + \frac{189}{25}(2\alpha + \alpha^2)^2} \chi_3,$$

$$\chi'_{31} = \frac{(1-\alpha)^2(1+2\alpha)^2}{(1 + \frac{14}{5}\alpha + \frac{17}{5}\alpha^2) + \frac{126}{25}(2\alpha + \alpha^2)} \chi_3, \quad (49)$$

$$\chi'_{32} = \chi_3,$$

$$\chi'_{33} = \left(\frac{1+2\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \chi_3,$$

hvor  $\chi_3$  er givet ved (47), og

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \quad (50)$$

Vekselvirkninger med andre radiale afhængigheder end den i (34) forudsatte  $r^\lambda$ -afhængighed har været anvendt i litteraturen (se f.eks. henv. 6 - 9). Det er påvist (henv. 19), at den radiale afhængighed af partikel-hul-vekselvirkningen kun spiller en ringe rolle for egenskaberne af de beregnede kollektive ekscitationer, når der benyttes konsistente værdier af de respektive koblingskonstanter.

### 3. Beregningen af eksitationsenergier og overgangsmatrixelementer.

Vekselvirkningen (37) har formen (16) og resultaterne fra afsnit 2.1. kan således udnyttes. I ligningssystemet for eksitationer med ulige paritet indgår alene leddene i (37) med ulige værdier af  $\lambda$ . De forskellige værdier af  $\mu$  optræder i ligningerne for  $\nu = \mu$ . Leddene med  $\mu_r = \pm 1$  virker i en af  $\mu_r = 0$  uafhængig kanal. Dette følger af, at kvasipartikelhamiltonoperatoren  $H_0$  bevarer størrelserne  $(-1)^Z$  og  $(-1)^N$ , hvor  $Z$  og  $N$  er antallet af protoner og neutroner. Jeg vil ikke behandle eksitationerne med  $\mu_r = \pm 1$ , som er eksitationer af tilstande i de ulige-ulige nabokerner til de betragtede lige-lige kerner.

For at simplificere beregningerne har jeg indført den yderligere antagelse, at der kan ses bort fra propagatorerne

$$G_{rr',\lambda\lambda',\mu}^{(0)}(E) = G_{\lambda\mu r',\lambda'\mu' r',0}^{(0)}(E) \quad (51)$$

for  $\lambda \neq \lambda'$ . Derved opnås, at ligningerne for de enkelte værdier af  $\lambda$  bliver uafhængige. Betragtes ligningerne for  $\lambda = 3$ , er den indførte antagelse ensbetydende med at antage, at oktupolsvingninger er beskrevet alene med oktupol-oktupolleddet. i (37).

De i  $\lambda$  ikke-diagonale propagatorer (51) er identisk nul i det sfæriske tilfælde. De er således størrelser af første orden i deformationen. Af rækkeudviklingen

$$\underline{G}(E) = \underline{G}^{(0)}(E) + \underline{G}'^{(0)}(E) \underline{\chi} \underline{G}^{(0)}(E) + \dots \quad (52)$$

ses, at de for at bidrage til  $G_{rr',33,\mu}(E)$  må optræde mindst to gange, således at korrektionen til disse propagatorer bliver af anden orden.

Beregningen af energier og overgangsmatrixelementer for oktopoleksitationerne er hermed reduceret til en bestemelse af poler og residuer af en todimensional matrixfunktion givet ved en ligning af formen (20). Matricen  $\underline{\chi}$  er i denne ligning givet ved

$$\underline{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 \\ 0 & \chi_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \chi_0 & 0 \\ 0 & \chi_1 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Matrixfunktionen har elementer  $G_{rr};(E)$ , idet indices  $\lambda = \lambda' = 3$  og  $\mu$  fra nu af underforstås i symbolet  $G_{rr},\lambda\lambda',\mu(E)$ .  $G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E)$  ses af (9) og (38) at have formen

$$G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) = \begin{pmatrix} G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) + G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) & G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) - G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) \\ G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) - G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) & G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) + G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

hvor

$$G_{\underline{i}\underline{i}}^{(0)}(E) = \sum_{\substack{\alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta}} \frac{(E_\alpha + E_\beta)(u_\alpha u_\gamma + v_\alpha v_\beta)^2 K_{\alpha\beta} Y_{\gamma\delta}(\vec{r}) / \gamma^2}{(E_\alpha + E_\beta)^2 - E^2} \quad (55)$$

Den benyttede metode til numerisk løsning af dette problem er beskrevet i tillæg A

Residuerne af  $\underline{\chi}(E)$  kan bringes på formen

$$\text{Res } \underline{\chi}(E) = - \underline{A}_1^T \underline{A}_1 \quad (56)$$

hvor  $\underline{A}_1$  betegner en rækkehatrix, og  $\underline{A}_1^T$  er den hermitesk konjugerede sojlematrix (sml. (91) og (93) i tillæg A), og overgangsmatrixelementerne af operatorerne

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \sum_{\gamma} \langle \alpha | \frac{1}{2} Y_{\gamma\gamma}(\vec{r}) | \beta \rangle B_{\gamma\gamma^{-1}}, \\ B_1 &= \sum_{\gamma} \langle \alpha | \frac{1}{2} Y_{\gamma\gamma}(\vec{r}) | \beta \rangle B_{\gamma\gamma^{-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

og

$$B_E = e(B_0 + B_1) \quad (58)$$

hvor  $e$  er elementarladningen, er da ifølge (21) og (38) givet ved

$$\left. \begin{aligned} \langle m | B_0 | 0 \rangle &= \frac{1}{2} A_0, \\ \langle m | B_1 | 0 \rangle &= \frac{1}{2} A_1, \\ \langle m | B_E | 0 \rangle &= \frac{e}{2} (A_0 + A_1). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

#### 4. Reducerede overgangssandsynligheder i laboratoriesystemet.

Til at beregne reducerede overgangssandsynligheder i laboratoriesystemet har jeg benyttet et sæt af tilnærmede udtryk, som er proportionale med kvadratet af matrixelementerne (59).

Den reducerede overgangssandsynlighed for elektrisk eksitation af  $I = 3$  - niveauet i det til et indre niveau  $m$  af den lige-lige kerne er givet ved

$$B(E; 0 \rightarrow 3_m) = |\langle 3_m | M_{3P}^{(E)} | 0 \rangle|^2, \quad (60)$$

hvor

$$M_{3P}^{(E)} = \sum_{i=1}^3 e \left( \frac{1}{i} + \epsilon_{i,i} \right) Y_{ii}(\vec{r}_i) \quad (61)$$

$\vec{r}_i$  betegner koordinater i laboratoriesystemet. Jeg vil

desuden betragte størrelserne

$$\left. \begin{aligned} B(r=0; 0 \rightarrow 3m) &= \langle \langle 3m || M_3^{(0)} || 0 \rangle \rangle / r^2, \\ B(r=1; 0 \rightarrow 3m) &= \langle \langle 3m || M_3^{(1)} || 0 \rangle \rangle / r^2, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} M_3^{(0)} &= \sum_{i=1}^9 \frac{1}{2} Y_{3P_i}(\vec{r}_i), \\ M_3^{(1)} &= \sum_{i=1}^9 t_{i,i} Y_{3P_i}(\vec{r}_i). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

De reducerede matricelementer i (62) har relevans for beskrivelsen af uelastiske spredningsprocesser (henv. 10).

Ved transformation til indre koordinater finder man (henv. 20)

$$\langle \langle 3m || M_3^{(0)} || 0 \rangle \rangle = \sqrt{g_{k_m}} \langle \langle m || M_{3k_m} || 0 \rangle \rangle \quad (64)$$

hvor  $M_{3P}$  er defineret som (61) eller (63) ved de indre koordinater  $\vec{r}$ ,  $k_m$  er K-kvantetallet for niveauet  $m$ , og

$$g_k = \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \\ 2 & \text{for } k>0 \end{cases} \quad (65)$$

Matrixelementet på højre side i (64) er et matricelement mellem indre tilstande, hvor  $|m\rangle$  betegner tilstanden med ikke-negativ projktion på aksen af det totale impulsmoment.

De sfærisk harmoniske polynomier af  $\vec{r}$  kan udtrykkes ved de sfærisk harmoniske polynomier af  $\vec{r}$ . Det gælder således

for  $\lambda = 3$ ,

$$Y_{3P}(\vec{r}) = a_p(r) Y_{3P}(\vec{r}) + b_p(r) r^2 Y_{3P}(\vec{r}), \quad (66)$$

hvor  $a_p(r)$  og  $b_p(r)$  er funktioner af deformationen.  $a_p(r)$  er eksplisit givet ved følgende udtryk:

$$\left. \begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1 + \frac{2}{5}\alpha + \frac{11}{5}\alpha^2}{(1-\alpha)^2}, \\ a_1(r) &= \frac{1 + \frac{14}{5}\alpha + \frac{17}{5}\alpha^2}{(1+2\alpha)(1-\alpha)}, \\ a_2(r) &= 1, \\ a_3(r) &= \frac{1-\alpha}{1+2\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

hvor jeg som tidligere har sat  $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta$ .  $b_p(r)$  er af første orden i deformationen.  $M_{3P}$  kan udtrykkes ved dobbelt-kvantisering som

$$M_{3P} = \sum_{\mu} \langle \alpha | f(t_i) Y_{3P}(\vec{r}) | \mu \rangle B_{\mu P}, \quad (68)$$

hvor  $f(t_i)$  repræsenterer de i (61) og (63) optrædende funktioner af  $t_i$ . Af (66) og (68) følger

$$\langle \langle m || M_{3P} || 0 \rangle \rangle = a_p(r) \langle \langle m || B || 0 \rangle \rangle + b_p(r) \langle \langle m || \tilde{B} || 0 \rangle \rangle, \quad (69)$$

hvor  $B$  betegner de i forrige afsnit definerede operatorer  $B_0$ ,  $B_1$  og  $B_\epsilon$ , og

$$\tilde{B} = \sum_{\mu} \langle \alpha | f(t_i) \tilde{Y}_{3P}(\vec{r}) | \mu \rangle B_{\mu P}. \quad (70)$$

Det sidste led i (69) optræder for  $\mu = 0$  og  $1$ . Beregnet med benyttelse af (24) bliver det en størrelse af anden orden i deformationen, idet  $b_p(r)$  er af første orden, og den i (24) optrædende propagator ligefølges er af første orden, da den er identisk nul i den sfæriske grænse. Udeladelsen af dette led repræsenterer

således en fejl af samme orden som den, der blev indført med den ekstra antagelse i foregående afsnit. Foretages denne tilnærmelse, opnås med anvendelse af (64) følgende udtryk for de reducerede matrixelementer:

$$\left. \begin{aligned} \langle 3m || M_3^{(e)} || 0 \rangle &= \sqrt{g_{K_m}} a_{K_m}(\beta) \langle m || B_e || 0 \rangle, \\ \langle 3m || M_3^{(o)} || 0 \rangle &= \sqrt{g_{K_m}} a_{K_m}(\beta) \langle m || B_o || 0 \rangle, \\ \langle 3m || M_3^{(n)} || 0 \rangle &= \sqrt{g_{K_m}} a_{K_m}(\beta) \langle m || B_n || 0 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Matrixelementerne på højre side er givet ved (59) med  $m = K_m$ .

#### 5. Beregningsmæssige detaljer.

Hamiltonoperatoren (27) er diagonaliseret i oscillatorrepresentationen (henv. 15, app. B). Matrixelementerne af  $y_{jk}(\beta)$  mellem basistilstandene i denne repræsentation er givet ved simple, analytiske udtryk (tillæg B). Ved løsning af BCS-ligningerne (33) er benyttet 12 niveauer på hver side af ferminiveauet. En beregning med i alt 50 niveauer gav ikke herfra væsentligt forskellige værdier af  $\Delta_i$ , ved passende renormalisering af pairingkonstanterne.

I udtrykket (55) har jeg medtaget alle led med  $E_a + E_n < 45 \text{ MeV}$  (sml. fig. 5), der involverer Nilsson-tilstande med  $N \leq 9$  for protoner og  $N \leq 10$  for neutroner. Bidraget fra led, som involverer større N-værdier, er lille i kraft af  $(u_n v_n + v_n u_p)^2$ -faktorerne. For at opnå en rimelig regnetid har jeg for  $E_a + E_n > 5 \text{ MeV}$  summeret residerne af  $\mathcal{T}_{ij}^{(n)}(\beta)$  (se tillæg A) over energiintervaller af længden 1 MeV og tilskrevet det totale residuum for hvert interval

til en pol placeret i tyngdepunktet af energifordelingen.

#### 6. Valg af parametre.

For deformationerne af de enkelte kerner er forudsat værdierne i tabel 1. Disse er for størstedelen taget fra

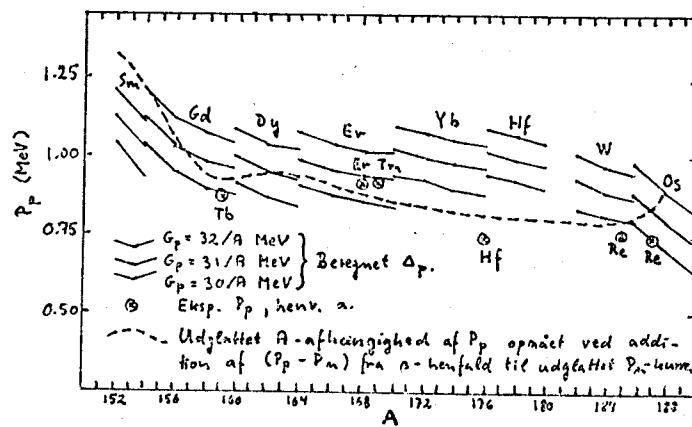
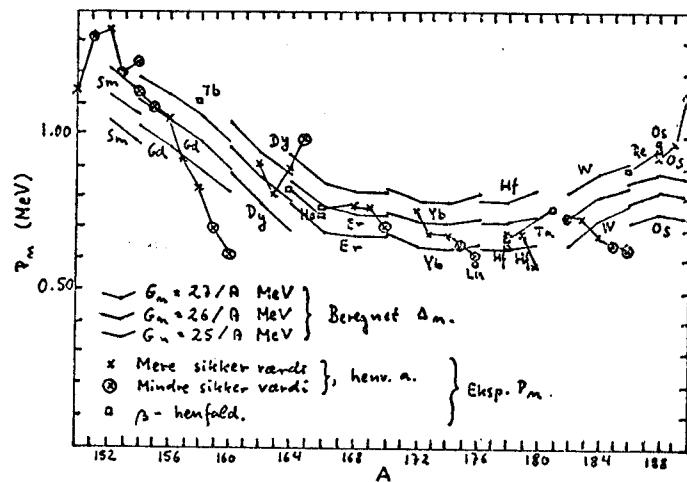
Tabel 1.

Værdier af deformationsparametren  $\beta$ .

Kerne	$\beta$	Kerne	$\beta$	Kerne	$\beta$
$\text{Sm}^{152}$	0.29	$\text{Er}^{162}$	0.30	$\text{Hf}^{176}$	0.28
$\text{Sm}^{154}$	0.34	$\text{Er}^{164}$	0.31	$\text{Hf}^{178}$	0.27
$\text{Gd}^{154}$	0.28	$\text{Er}^{166}$	0.32	$\text{Hf}^{180}$	0.25
$\text{Gd}^{156}$	0.32	$\text{Er}^{168}$	0.32	$\text{W}^{182}$	0.24
$\text{Gd}^{158}$	0.35	$\text{Er}^{170}$	0.31	$\text{W}^{184}$	0.22
$\text{Gd}^{160}$	0.35	$\text{Yb}^{168}$	0.30	$\text{W}^{186}$	0.22
$\text{Dy}^{156}$	0.28	$\text{Yb}^{170}$	0.30	$\text{Os}^{186}$	0.24
$\text{Dy}^{158}$	0.31	$\text{Yb}^{172}$	0.31	$\text{Os}^{188}$	0.22
$\text{Dy}^{160}$	0.30	$\text{Yb}^{174}$	0.31	$\text{Os}^{190}$	0.20
$\text{Dy}^{162}$	0.32	$\text{Yb}^{176}$	0.30	$\text{Os}^{192}$	0.19
$\text{Dy}^{164}$	0.33	$\text{Hf}^{174}$	0.29		

henv. 22. For Os-isotoperne er benyttet værdier uddraget af fig. 26 i henv. 20.

I Nilsson-potentialet er benyttet



$$\Delta_{t_i} = \frac{41}{A^{1/3}} \text{ MeV} \quad (72)$$

og der er anvendt de i henv. 14 anførte værdier for  $\chi_{t_i}$  og  $M_{t_i}$ . Disse er

$$\begin{aligned} \Delta_{t_i} &= \Delta_m = 0.0637, \\ M_p &= 0.60, \quad M_m = 0.42, \end{aligned} \quad (73)$$

Pairingkonstanterne  $G_{t_i}$  er bestemt ud fra en sammenligning af de med forskellige værdier af disse beregnede energigabparametre  $\Delta_{t_i}$  med de i henv. 21 sammenfattede, eksperimentelle ulige-lige massedifferenser (se fig. 1.). Jeg har valgt værdierne

$$G_p = \frac{30.0}{A} \text{ MeV}, \quad G_m = \frac{25.5}{A} \text{ MeV}. \quad (74)$$

I størstedelen af beregningerne er koeficienten a i (35) sat lig med 0.5. En vurdering ud fra symmetribidraget i den semiempiriske masseformel giver en hermed overensstemmende værdi for isovektordelen af middelpotentialet (henv. 11). I enkelte regninger er benyttet a = 2, som synes at gælde for dipol-dipolvekselvirkningen (henv. 18).

### 7. Koblingskonstanten $\chi_0$

Jeg har for en række lavliggende, eksperimentelle rotationsbånd med  $K^\pi = 0^-, 1^-, 2^-$  eller  $3^-$  i spektrene af de betragtede kerner beregnet de værdier af koblingskonstanten  $\chi_0$ , som reproducerer beliggenheden af de pågældende bånd. Resultatet er vist i fig. 2b. Fig. 2a viser resultatet af en tilsvarende beregning med den samme oktopol-oktopolkraft

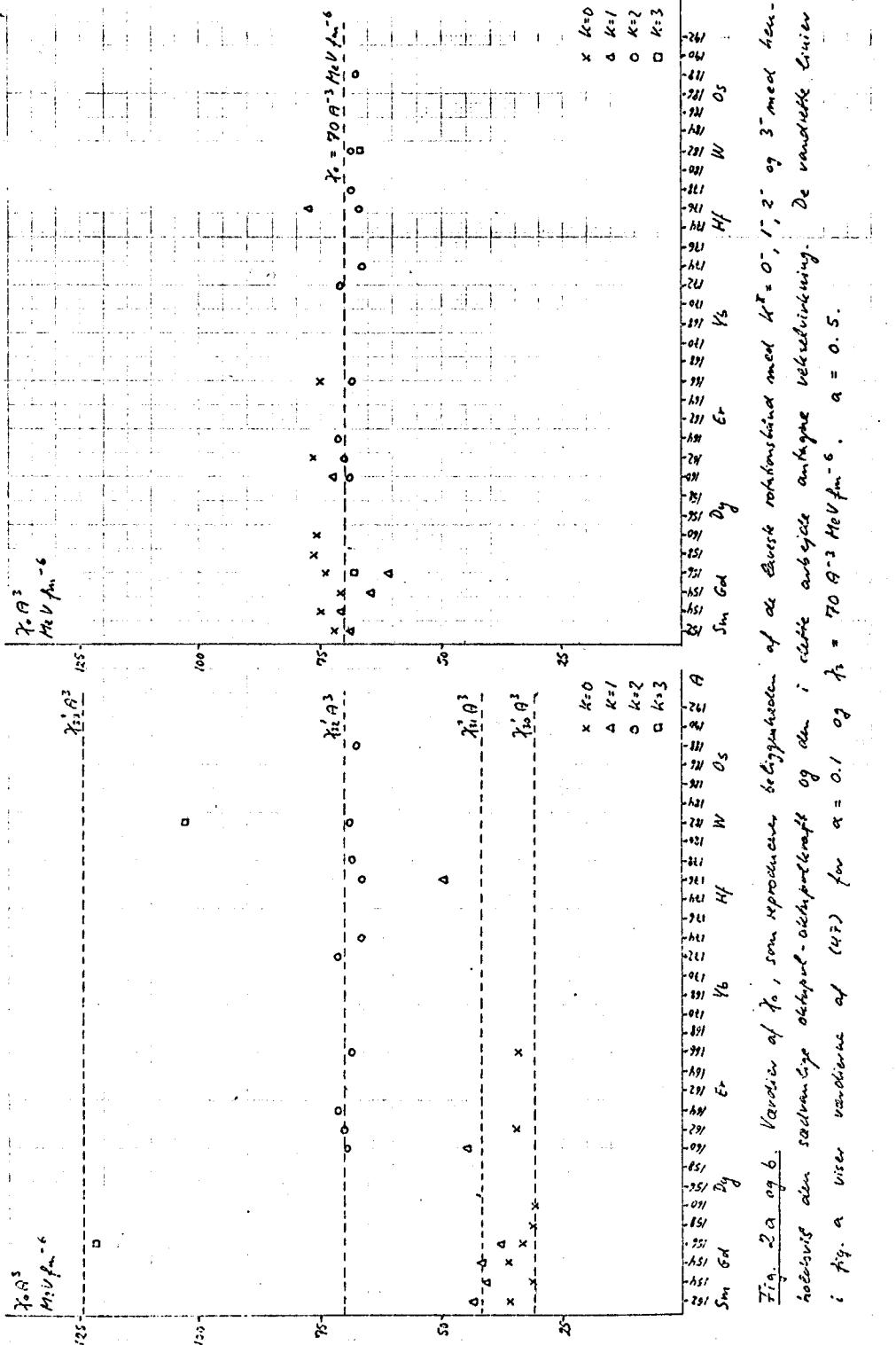


Fig. 2a og b. Værdier af  $\chi_3$ , som reproduceres ved hjælp af de laveste rotationsbind med  $K^T = 0^-, 1^-, 2^-$  og  $3^-$  med henholdsvis den relativistiske octupole-octupolekraft og den i relativitet antagte vekselvirkning. De vandrette linier i fig. a viser værdierne af (47) for  $a = 0.1$  og  $\beta = 70 A^{-3} \text{ MeV fm}^{-6}$ .  $a = 0.5$ .

$$V(1,2) = - \chi_3 \sum_i Y_{3p}(\vec{r}_i) Y_{3p}(\vec{r}_2)^t. \quad (75)$$

I begge tilfælde er forudsat isospinafhængigheden (35) med  $a = 0.5$ .

Af fig. 2b fremgår det, at de eksperimentelle energier alle reproduceres med vekselvirkningen (34) med en koblingskonstant

$$\chi_3 \approx \frac{70}{A^3} \text{ MeV fm}^{-6}. \quad (76)$$

Denne værdi afhænger kun lidt af parameteren  $a$ . Sættes  $a = 2$ , forøges  $\chi_3$ -værdierne i fig. 2 således med  $\approx 4\%$ . Man kan sammenligne den fundne værdi af  $\chi_3$  med vurderingen (47). Antages i dette udtryk en homogen, ellipsoid massefordeling med middelradius  $R = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$ , finder man

$$\chi_3 = \frac{82}{A^3} \text{ MeV fm}^{-6}. \quad (77)$$

En mindre skarpt afgrænset fordeling ville give en lidt lavere værdi. I henv. 10 er der angivet et empirisk udtryk med en blandet  $A$ -afhængighed for octupolkoblingskonstanten i en række sfæriske kerner<sup>2)</sup>). En ekstrapolering af dette til  $A = 170$  giver

$$\chi_3 = \frac{64}{A^3} \text{ MeV fm}^{-6}. \quad (78)$$

Strukturen af fig. 2a kan forstås ud fra overvejelserne i afsnit 2.4. I figuren er således indtegnet værdierne af (49) med  $\chi_3 = 70 A^{-3} \text{ MeV fm}^{-6}$  og  $a = 0.1$  (svarende til  $\beta = 0.32$ ). Man ser, at forholdet mellem koblingskonstanten for forskellige  $K$ -værdier svarer til forholdet mellem værdierne (49).

I fig. 3 er vist, hvorledes antagelsen af den ene eller

<sup>2)</sup> Beregningerne i henv. 10 er foretaget med  $a = 0$ .

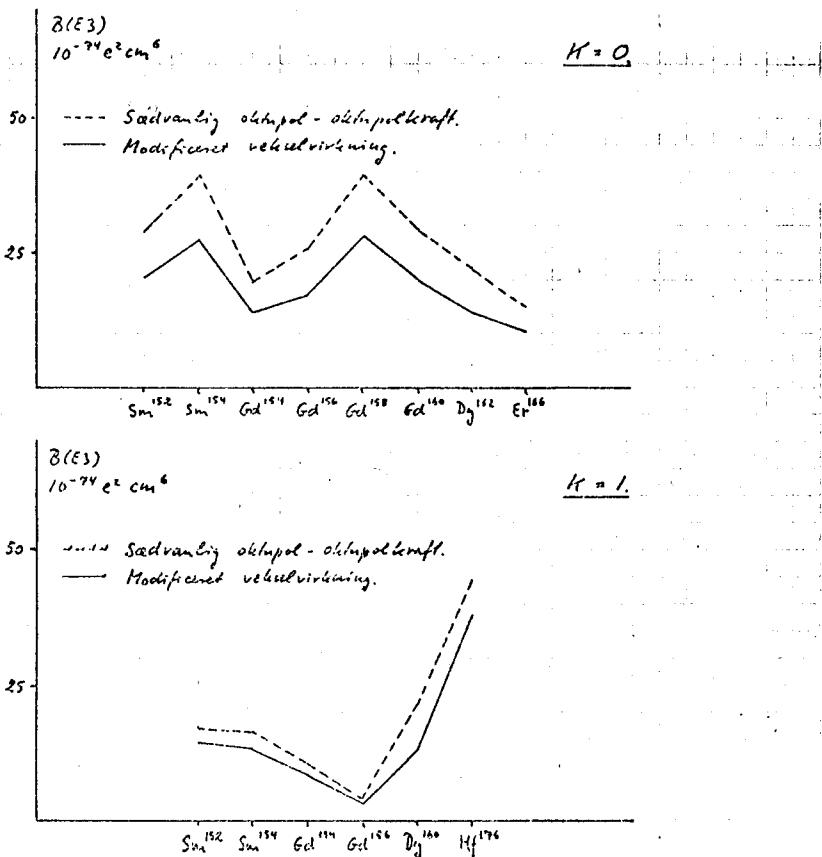


Fig. 3a og b.  $B(E3)$ -værdier svarende til de indre niveauer i tabel 2 beregnet med den værdi af  $\chi_0$ , som reproducerer den eksperimentelle energi.  $a = 0.5$ .

den anden af de to vekselvirkninger påvirker størrelsen af de beregnede  $B(E3)$ -værdier for  $K = 0$  og  $K = 1$ . Ved beregningen er benyttet den værdi af  $\chi_0$ , som reproducerer den eksperimentelle energi. For  $K = 2$  og  $K = 3$  bliver de således beregnede  $B(E3)$ -værdier identiske. For  $B$ -værdierne med den modificerede vekselvirkning er benyttet udtrykket (71).

$\chi_0$ -værdien svarende til en given indre energi  $E_0$  kan bestemmes ved løsning af ligningen

$$\det(\mathcal{G}^{(0)}(E_0) - \chi) = 0 \quad (79)$$

hvor  $\chi$  er substitueret med  $-\alpha\chi$ .  $E_0$  er i de fleste tilfælde fundet ved tilpasning af konstanterne i udtrykket

$$E_I = E_0 + A(I(I+1) - K^2) + B(I(I+1) - K^2)^2 \quad (80)$$

til de tre laveste niveauer i rotationsbåndet. I de tilfælde, hvor kun to eller ét niveau synes kendt, er  $B$  sat lig med nul. I sidstnævnte tilfælde har jeg for  $A$  benyttet middelværdien for de øvrige bånd med samme  $K$ . For det stærkt deformerede  $K = 0$ -bånd i  $Gd^{154}$  og  $K = 2$ -bånd i  $Dy^{160}$  har jeg bestemt  $E_0$  ved de to nederste niveauer. De eksperimentelle niveauer er taget fra henv. 23 suppleret med en række kilder for de enkelte spektre (henv. 24 - 39).  $K$ -værdierne er antaget på grundlag af disse kilders angivelser samt henv. 1, 5, 40 og 41.. I tabel 2 er givet en oversigt over de benyttede  $E_0$ -værdier med henvisninger til de respektive kilder.

Med de valgte parametre ligger  $E_0$  for  $K = 0$ -båndet i  $Hf^{176}$  mindre end 10 keV fra den laveste pol af  $\frac{G}{z}(E)$ . For  $K = 1$ -båndet i  $Er^{166}$  og  $Yb^{172}$  og  $K = 3$ -båndet i  $Er^{166}$  og  $Er^{168}$  ligger  $E_0$  højere end den laveste pol. De tilsvarende punkter er udeladt af fig. 2 og 3.

Tabel 2.

Indre energier svarende til lavtliggende, eksperimentelt kendte rotationsbånd med  $K^{\pi} = 0^-, 1^-, 2^- \text{ og } 3^-$ .

Kerne	$E_i$ (MeV)	Henv.	Kerne	$E_o$ (MeV)	Henv.
<u><math>K = 0:</math></u>					
Sm <sup>152</sup>	0.95	23, 24, 29	K = 2:		
Sm <sup>154</sup>	0.90	24	Dy <sup>160</sup>	1.26	23, 26, 34, 40
Gd <sup>154</sup>	1.24	25	Dy <sup>162</sup>	1.13	26, 30
Gd <sup>156</sup>	1.24	23, 25	Dy <sup>164</sup>	0.96	23, 26, 35
Gd <sup>158</sup>	0.97	23, 25	Er <sup>166</sup>	1.44	23, 27, 36
Gd <sup>160</sup>	1.21	25	Yb <sup>172</sup>	1.15	28
Dy <sup>162</sup>	1.26	26, 30	Yb <sup>174</sup>	1.30	23, 28
Er <sup>166</sup>	1.65	23, 40	Hf <sup>176</sup>	1.26	31, 1
Hf <sup>176</sup>	1.71	31, 1	Hf <sup>178</sup>	1.23	37
<u><math>K = 1:</math></u>					
Sm <sup>152</sup>	1.51	23, 24, 32	K = 3:		
Sm <sup>154</sup>	1.46	24	Gd <sup>156</sup>	1.90	23, 40
Gd <sup>154</sup>	1.73	25	Er <sup>166</sup>	1.88	36
Gd <sup>156</sup>	1.82	25	Er <sup>168</sup>	1.51	27, 39
Dy <sup>160</sup>	1.33	23, 41	W <sup>182</sup>	1.39	23, 38
Er <sup>166</sup>	1.82	23, 40	Os <sup>188</sup>	1.44	23, 5
Yb <sup>172</sup>	1.60	23, 33, 1			
Hf <sup>176</sup>	1.14	23, 31, 1			

For så vidt muligt at reproducere rækkefølgen af rotationsbåndene med forskelligt K i de kerner, hvor der kendes flere sådanne bånd, har det været nødvendigt at antage lidt forskellige værdier af  $\chi_0$  for de fire K-værdier. De i det følgende benyttede værdier fremgår af tabel 3..

Tabel 3.

Værdier af koblingskonstanten  $\chi_0$ .

K	$\chi_0$ (MeV fm <sup>-6</sup> )
0	73
1	70
2	68.5
3	66

## 8. Resultater.

### 8.1. Det samlede spektrum.

Fig. 4 viser den resulterende fordeling af størrelserne  $\beta(\tau=0)$ ,  $\beta(\tau=1)$  og  $\beta(E3)$  efter den indre energi  $E_i$ , beregnet for  $Er^{166}$  med  $\chi_0$ -værdierne i tabel 3 og  $a = 0.5$ . Spektret af  $Er^{166}$  er repræsentativt for spektrene af andre beregnede kerner.

Fig. 5 og 6 illustrerer de enkelte trin i beregningen. Fig. 5 viser således fordelingen af residuerne af  $G_{\tau_i}^{(o)}(E)$  - det "uperturberede" spektrum - for  $\tau_i = \pm \frac{1}{2}$  og de enkelte værdier af  $\mu$ . I fig. 6 er vist den resulterende fordeling af de indre matrixelementer  $|K_m | B_d | 0 \rangle|^2$ ,  $| \langle m | B_d | 0 \rangle |^2$  og  $| \langle m | B_E | 0 \rangle |^2$ . Fig. 4 fremkommer ved addition af fig. 6a - d vægtet med faktorerne  $g_\mu a_\mu(\beta)^2$  (jfr. afsnit 4).

Fig. 7 viser resultatet af en beregning med  $a = 2$ .  $\chi_0$ -værdierne er de samme som før. (Disse er som nævnt i foregående afsnit  $\approx 4\%$  for små til at reproducere de eksperimentelle energier, når  $a = 2$ . Toppene i begyndelsen af  $\tau=0$  - og E3-spektret ligger følgelig en smule for højt i fig. 7.)

$\tau=1$  -styrken i de resulterende spektre er i det væsentlige fordelt i disses højreliggende del - fra 15 til 30 MeV for  $a = 0.5$  og fra 20 til 35 MeV for  $a = 2$ . I begge tilfælde er der tale om en bred, resonanslignende fordeling.  $\tau=0$  -styrken i området indtil 3 MeV udgør for  $a = 0.5$  4% og for  $a = 2$  ca. 1% af  $\tau=1$  -styrken i samme område.

Området indtil 3 MeV indeholder for  $a = 0.5$  14% af den samlede  $\beta(\tau=0)$  -oscillatorstyrke og 6% af den samlede  $\beta(E3)$  -oscillatorstyrke.

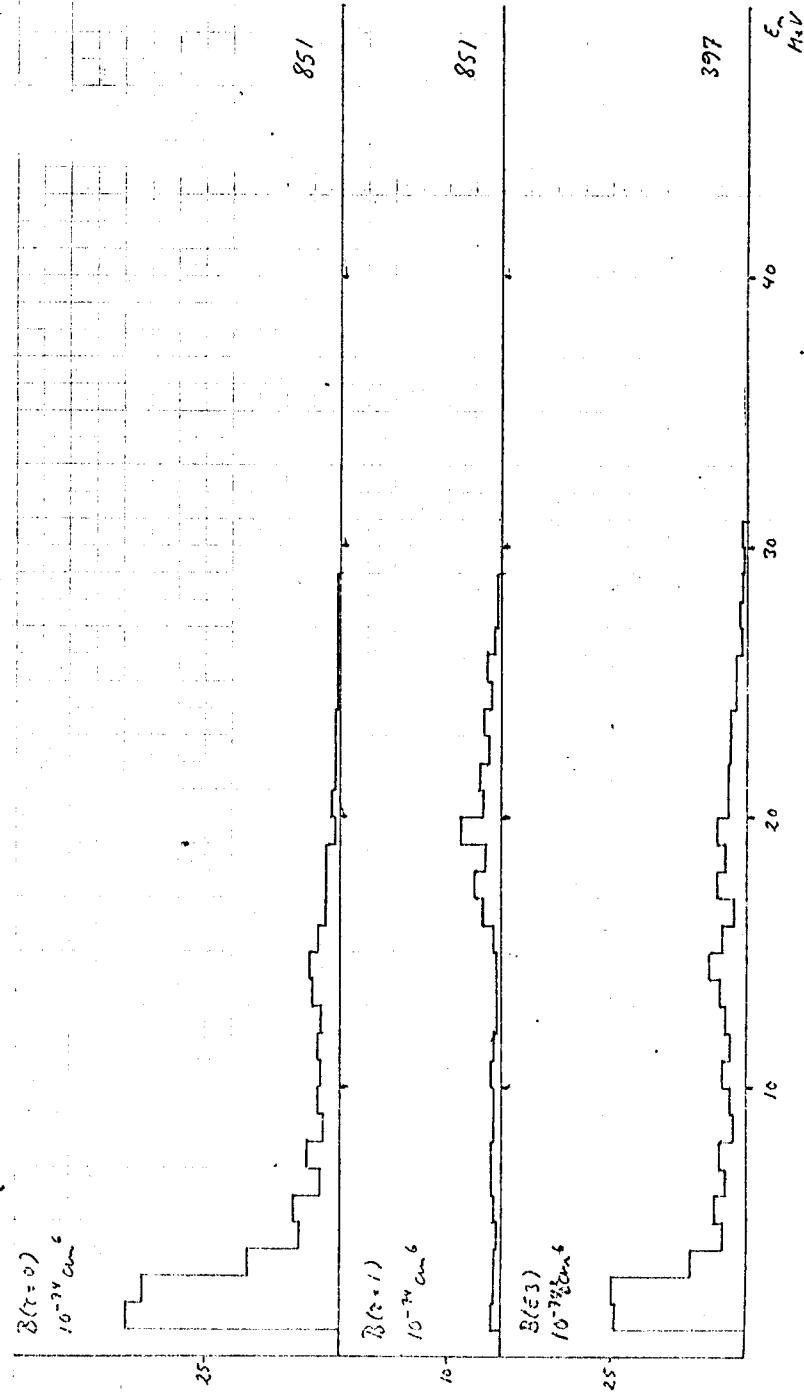


Fig. 4. Resulterende fordeling af  $\beta(\tau=0)$ ,  $\beta(\tau=1)$  og  $\beta(E3)$  efter den indre energi  $E_i$  beregnet med  $\chi_0$ -værdierne i tabel 3 og  $a = 0.5$ . Tallet 851 og 397 viser de høje angivne værdierne af de samlede oscillatorstyrker  $\int E_n \beta(\tau=0; 0 \rightarrow 3n) dE_n$  i henb.  $10^{-24}$  cm $^6$  og  $10^{-24}$  cm $^6$  af  $Er^{166}$ . Enheden for  $\beta(E3)$  staves anten et sig for en elektrisk dipolemoment. Kerner:  $Er^{166}$ .

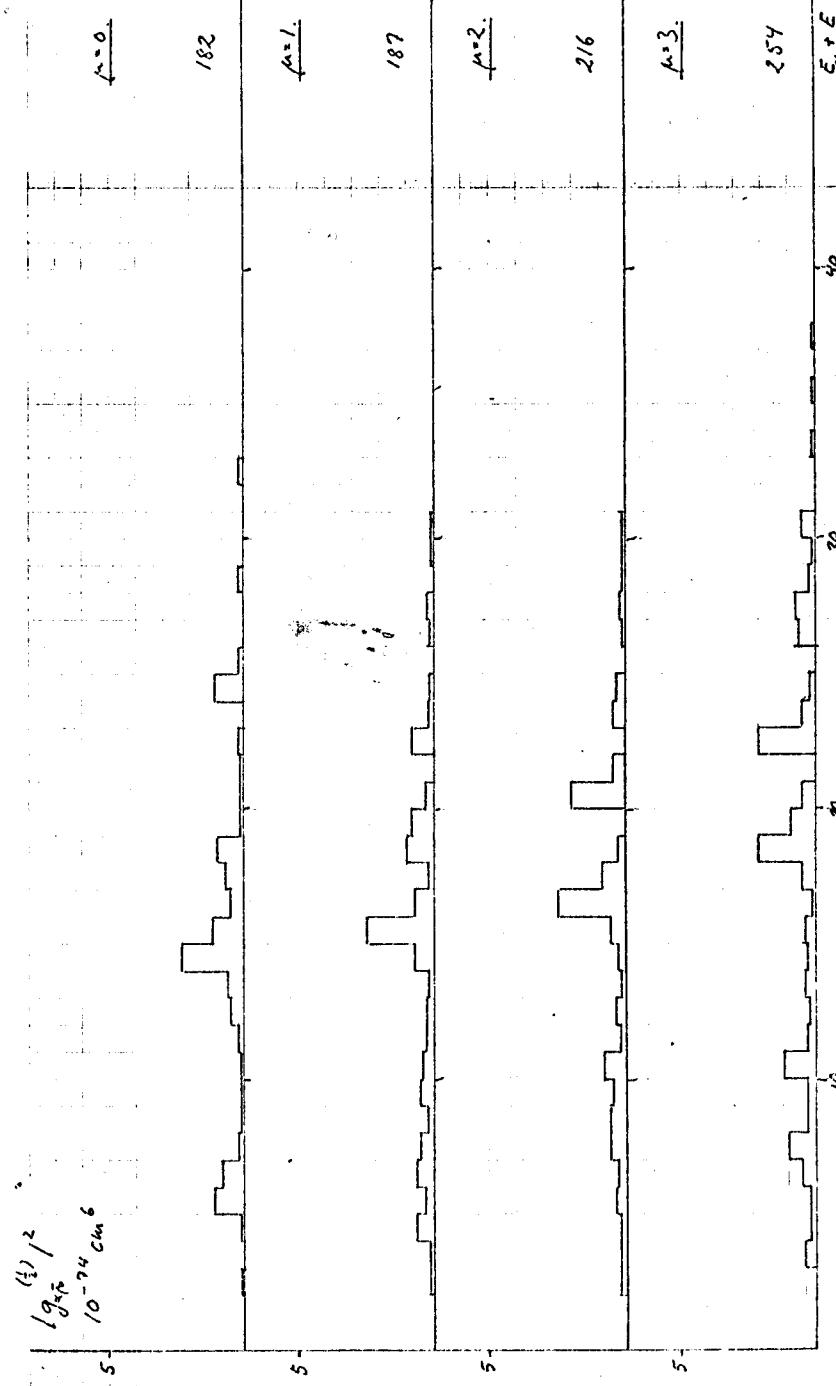


Fig. 5a. Unperturbed spectrum for protons  
 $\frac{1}{g_{\text{eff}}^{(2)}} = g_{\text{eff}}^{(2)} (\alpha_{\text{Vp}} + \alpha_{\text{Ap}}) \langle \alpha | \gamma_{\text{p}} | \vec{r}^2 \rangle / \alpha^2$ . Table  
 the hope gives variance of  $\frac{1}{g_{\text{eff}}^{(2)}} (E_2 + E_3) / g_{\text{eff}}^{(2)}$   $10^{-74} \text{ cm}^6$ .

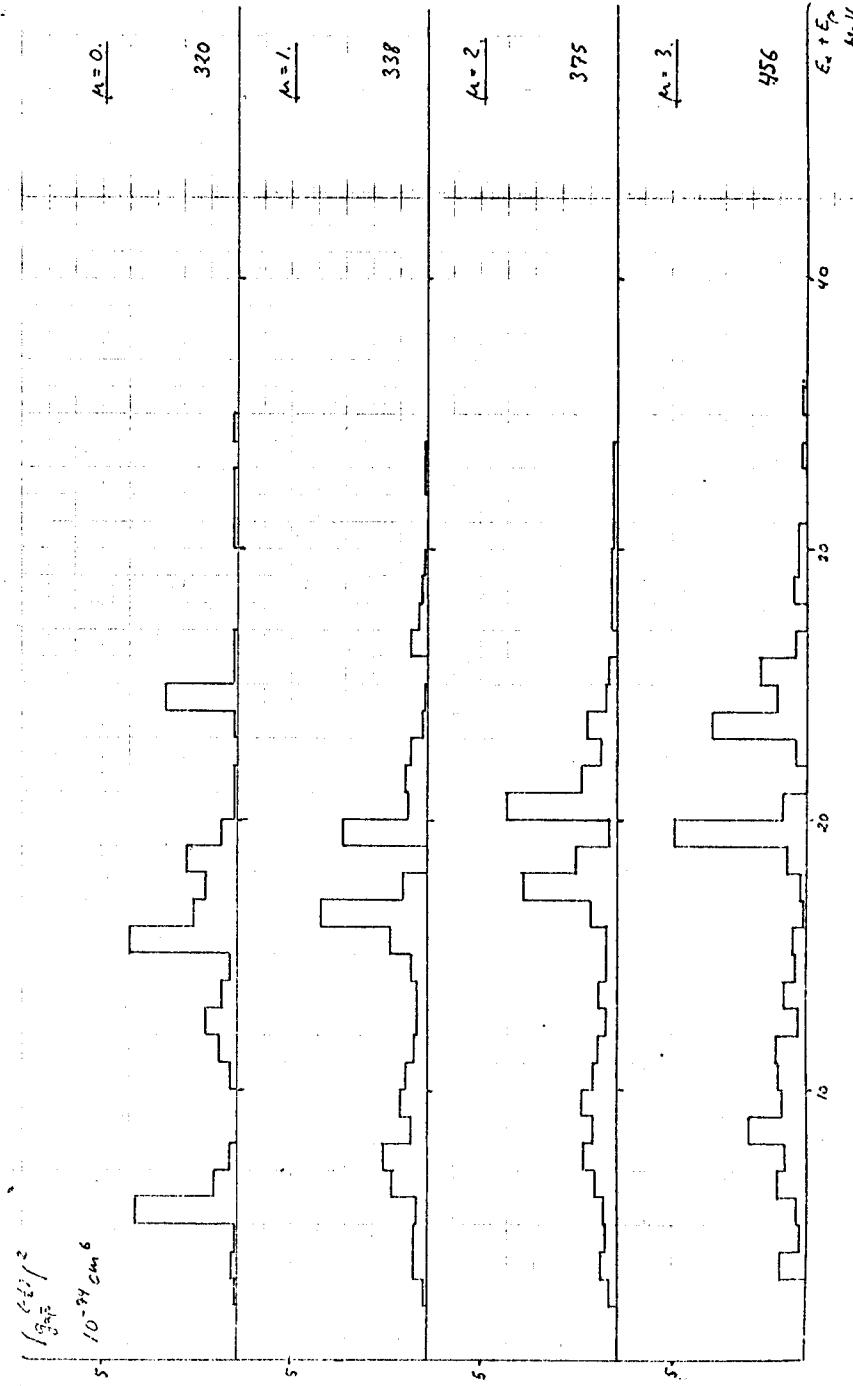
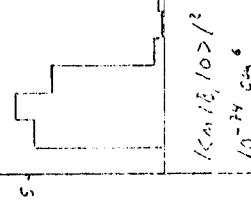


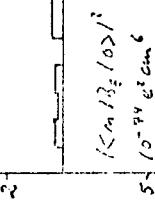
Fig. 5b. Same as for protons.

$$1 \langle n / \beta_0 / 10 \rangle^{1/2}$$

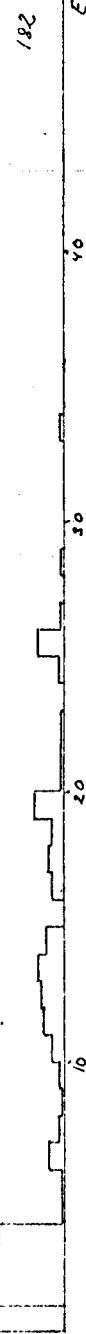
$10^{-74} \text{ cm}^6$



126



126

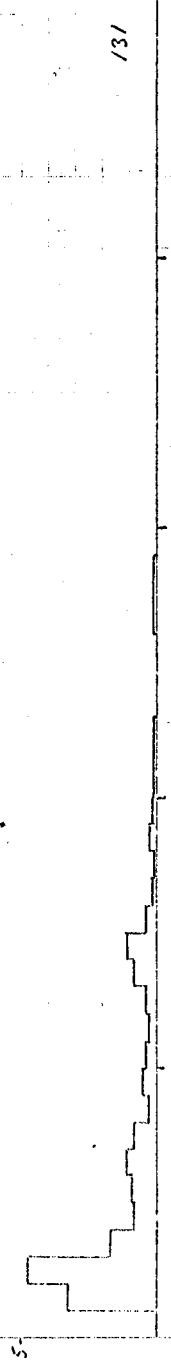


182

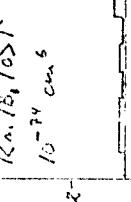
Fig. 6a. Resonance induced spectrum for  $\mu = 0$ . Parameters same in fig. 6c. Table 6  
the hope again receives of  $\sum E_m \langle n / \beta_0 \rangle^{1/2}$  in  $10^{-74} \text{ cm}^6$  henr.  $10^{-74} \text{ eV cm}^6$ .

$$1 \langle n / \beta_0 / 10 \rangle^{1/2}$$

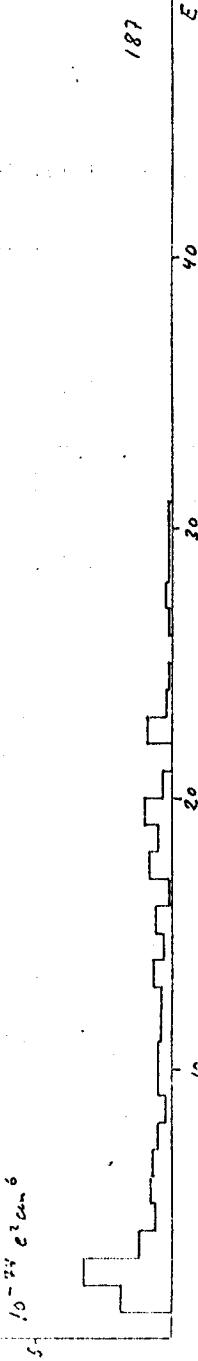
$10^{-74} \text{ cm}^6$



131



131



187

Fig. 6b. Same as for  $\mu = 1$ .

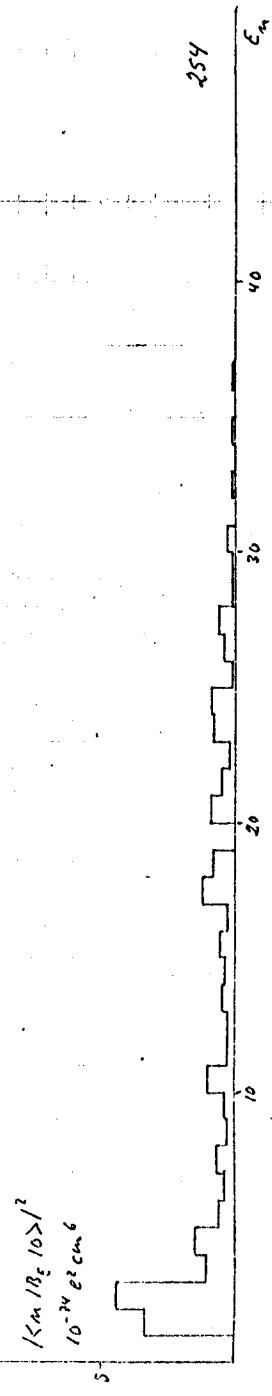
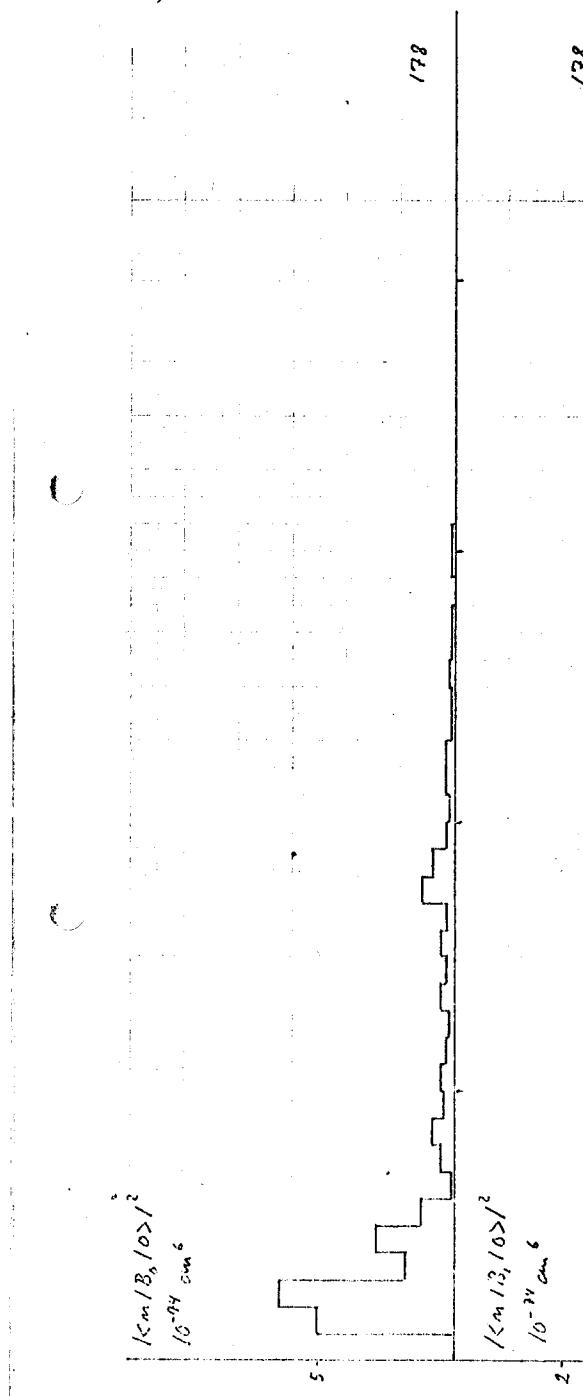
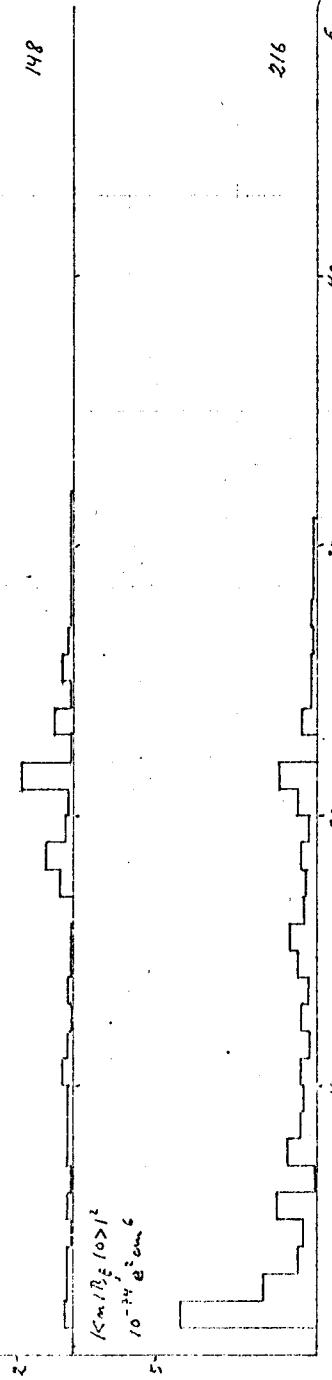
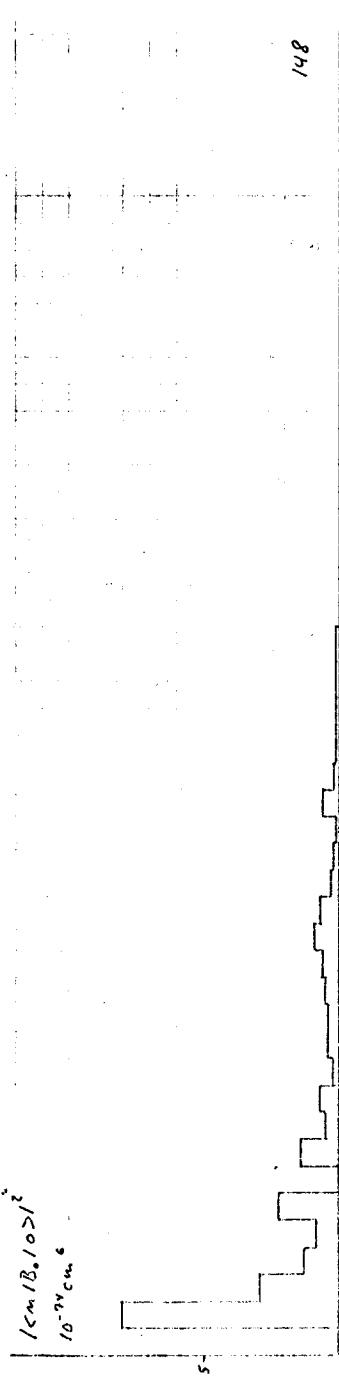


Fig. 6d. Same 6a for  $\mu = 3$ .

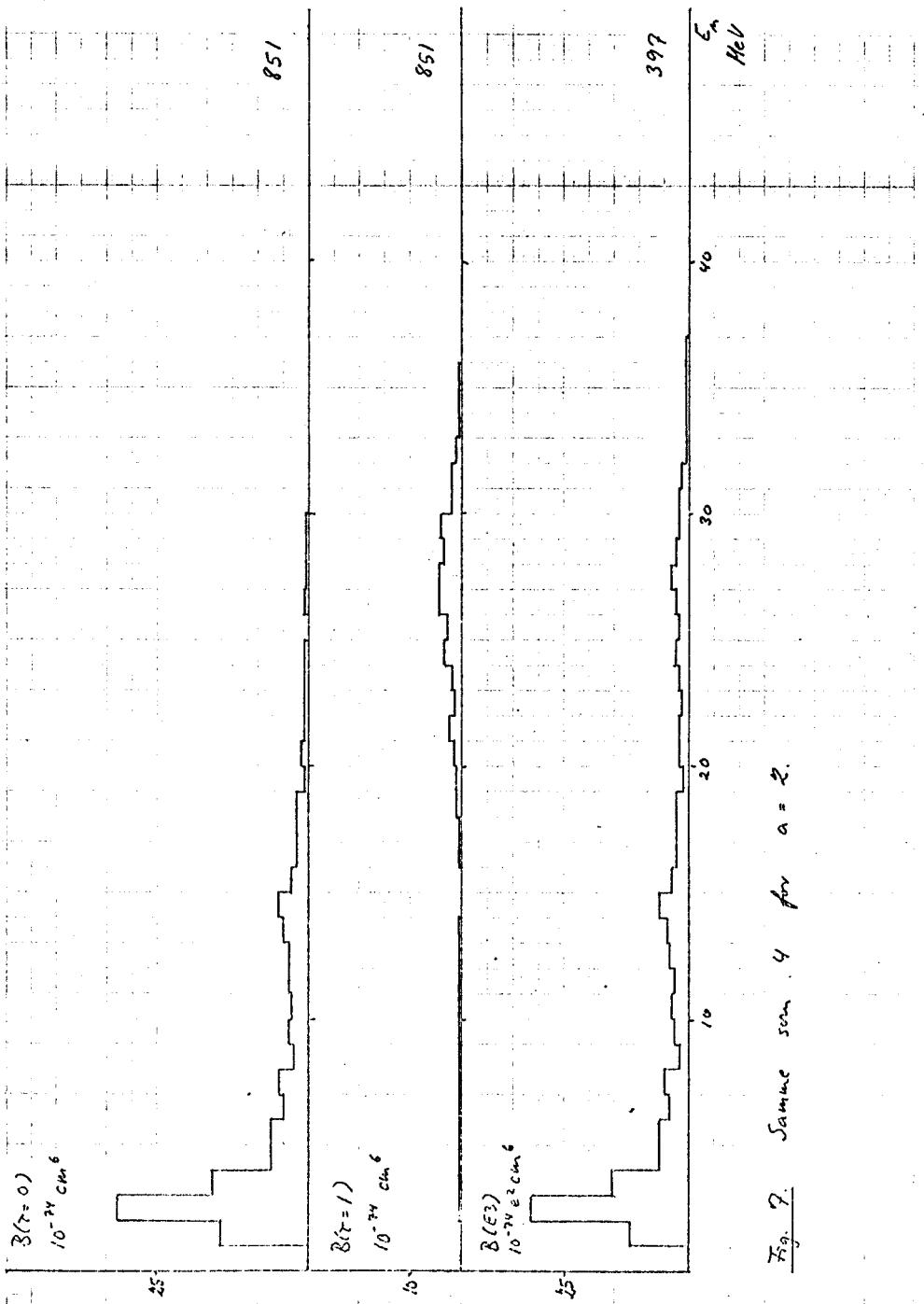


Fig. 8 - Samme som 4 for  $a = 2$ .

### 8.2. Lavenergispektret.

Fig. 8 - 39 viser for de enkelte kerner det beregnede spektrum indtil 3 MeV med  $a = 0.5$  og  $\chi$  - værdierne i tabel 3. Egenskaberne af den lavest beregnede eksitation for hver værdi af  $K$  er sammenfattet i fig. 40 og 41. Fig. 42 - 44 illustrerer spektrenes afhængighed af de enkelte parametre i modellen.

Spektrene for de enkelte værdier af  $K$  i fig. 8 - 39 indeholder i mange tilfælde en enkelt kollektiv eksitation men lige så ofte to eller flere niveauer med relativt store  $B(E3)$ -værdier. Det laveste niveau er ikke nødvendigvis et af disse. Den samlede beregnede oktupolstyrke i energiområdet synes gennemgående for stor i sammenligning med styrken i de eksperimentelle spektre.

Forholdet mellem  $\langle 3u||M_1^{(3)}||0\rangle$  og  $\langle 3u||M_3^{(3)}||0\rangle$  er stort set konstant for de størkeste eksitationer -  $\approx -0.2$  for  $a = 0.5$ , d.v.s. af samme størrelsesorden som forholdet mellem  $Z - N$  og  $A$ . Forholdet - og dermed  $B(E3)$ -værdierne - afhænger stærkt af parameteren  $a$ .

Modellen ses af fig. 40 at reproducere den almene variation gennem det deformerede område af den laveste indre eksitationsenergi for de enkelte værdier af  $K$ . Med hen-syn til detaljerne i denne variation synes der at opnås bedre overensstemmelse for  $K = 2$  og  $3$  end for  $K = 0$  og  $1$ .

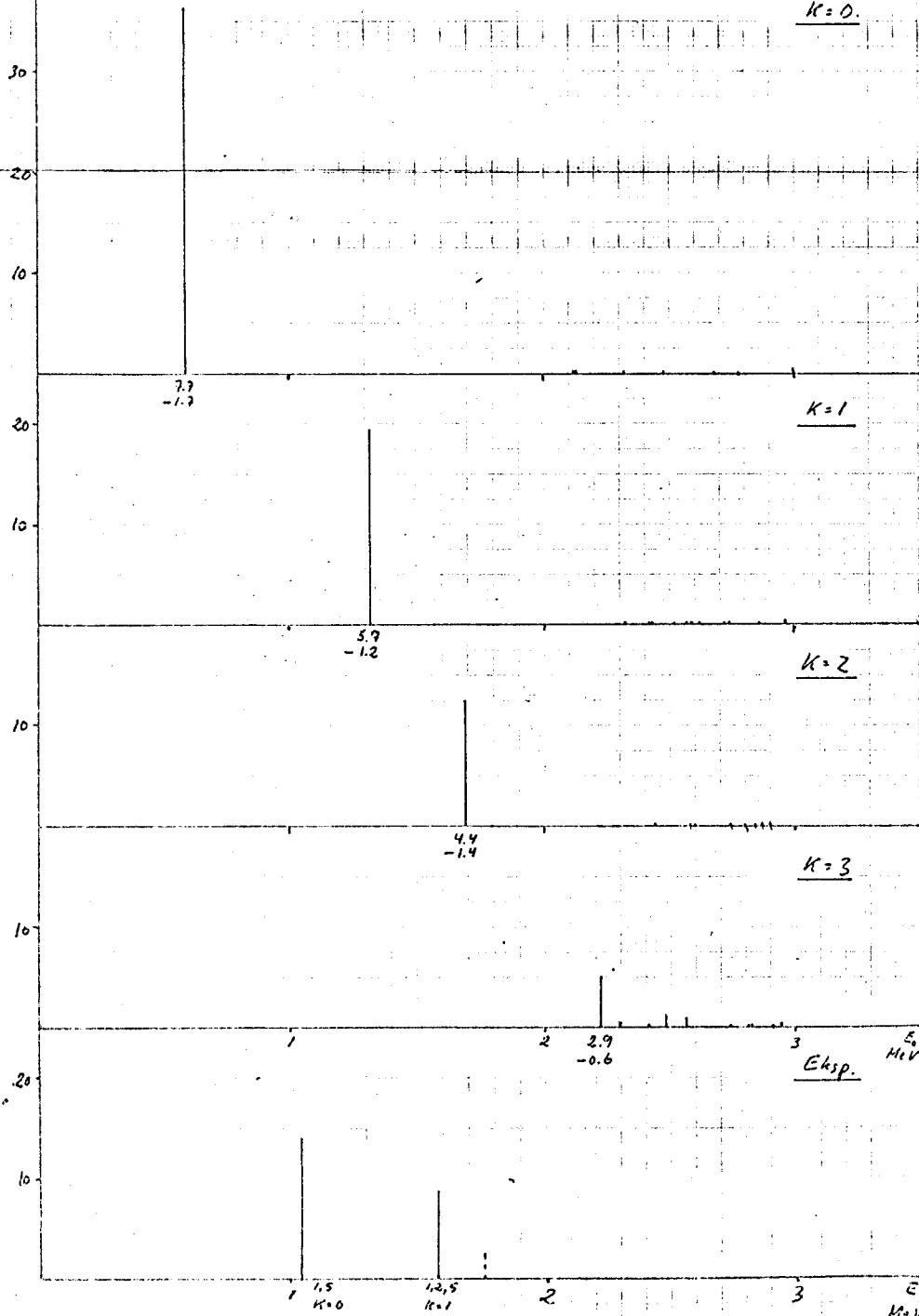
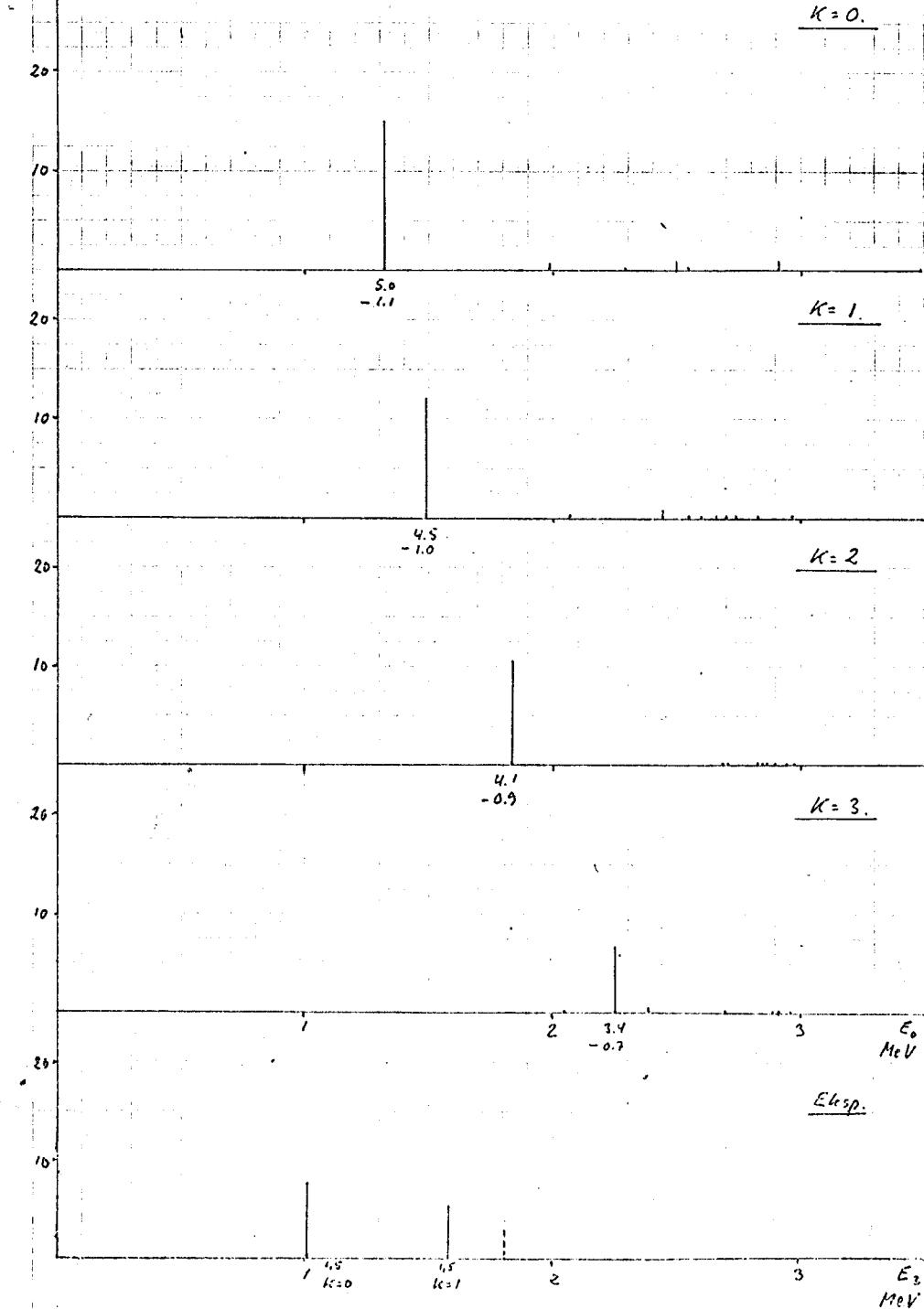
De eksperimentelle  $B(E3)$ -værdier for det laveste  $3^-$  - niveau aftager stærkt med voksende neutrontal i kerne Sm - Yb (henv. 42, se fig. 8 - 28). De beregnede værdier i fig. 41 udviser en sådan variation for  $K = 0, 1$  og  $3$ , mens den tilsvarende variation er svag for  $K = 2$ .  $K = 2$  - spektrene i fig. 8 - 39 har i det hele taget en mere ensartet form end spektrene for de tre andre  $K$  - værdier.

Det bemærkes, at der forudsiges at optræde lavliggende rotationsbånd med  $K = 3$  og relativt store  $B(E3)$ -værdier i slutningen af området. I Os-isotoperne forudsiges således et  $K = 3$ -bånd som det laveste.

Fig. 8 - 39. Beregnede spektre indtil 3 MeV for de enkelte verdier af  $K$ .  $B(E3)$ -værdierne er vist som funktion af den indre energi  $E_{\nu}$ . For de sterkeste ekscitatorer er under figuren angivet værdierne af  $\langle 3m||M^{(3)}||0 \rangle$  og  $\langle 3m||M^{(1)}||0 \rangle$  i  $10^{-11} \text{ cm}^3$ .

Nederst er sammenfattet en række eksperimentelle data, som kan sammenlignes med de beregnede spektre, uddraget af de i tabel 2 anførte kilder.  $B(E3)$ -værdierne er her afsat som funktion af energien af  $3^-$ -niveaueret. De hidrører alle fra henv. 24 - 28 og er målt ved forsøg med uelastisk spredning af deuteroner. Tre verdier er desuden målt ved Coulomb-eksitation (se fig. 40).  $3^-$ -niveauer, som ikke er set i disse forsøg, er markeret med en pil. Under de enkelte niveauer er anført spinnene af niveauer, som formodes at tilhøre samme rotationsbånd, samt de af de respektive kilder anførte  $K$ -værdier. En vensentlig del af disse data stammer fra de fornævnte  $(d,d')$  - forsøg, i hvilke kun tilstande med naturlig paritet forventes observeret.

Rotationsenergien i  $3^-$  - tilstandene er for de rotationsbånd, der ligger til grund for tabel 2,  $\leq 100$  keV.

$B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{ cm}^2$ Berechnet: $K=0$  $B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{ cm}^2$ Berechnet: $K=0$ 

$B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{cm}^6$ 

Begrenz:

K=0.

20

10

4.9

-1.1

K=1.

20

10

4.6

-1.0

K=2.

20

10

4.1

-0.7

K=3.

20

10

2 3.1

-0.7

 $E_3$   
MeVE<sub>exp.</sub>

20

10

Heinv. 23, 40.

 $E_3$   
MeV

K=0

K=1 K=3

Tm 11 A 156

 $B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{cm}^6$ 

Begrenz:

K=0.

20

10

6.4

-1.4

K=1.

20

10

5.6

-1.2

K=2.

20

10

4.5

-0.8

K=3.

20

10

2 3.2

-0.6

 $E_3$   
MeVE<sub>exp.</sub>

20

10

K=1

K=2

 $E_3$   
MeV

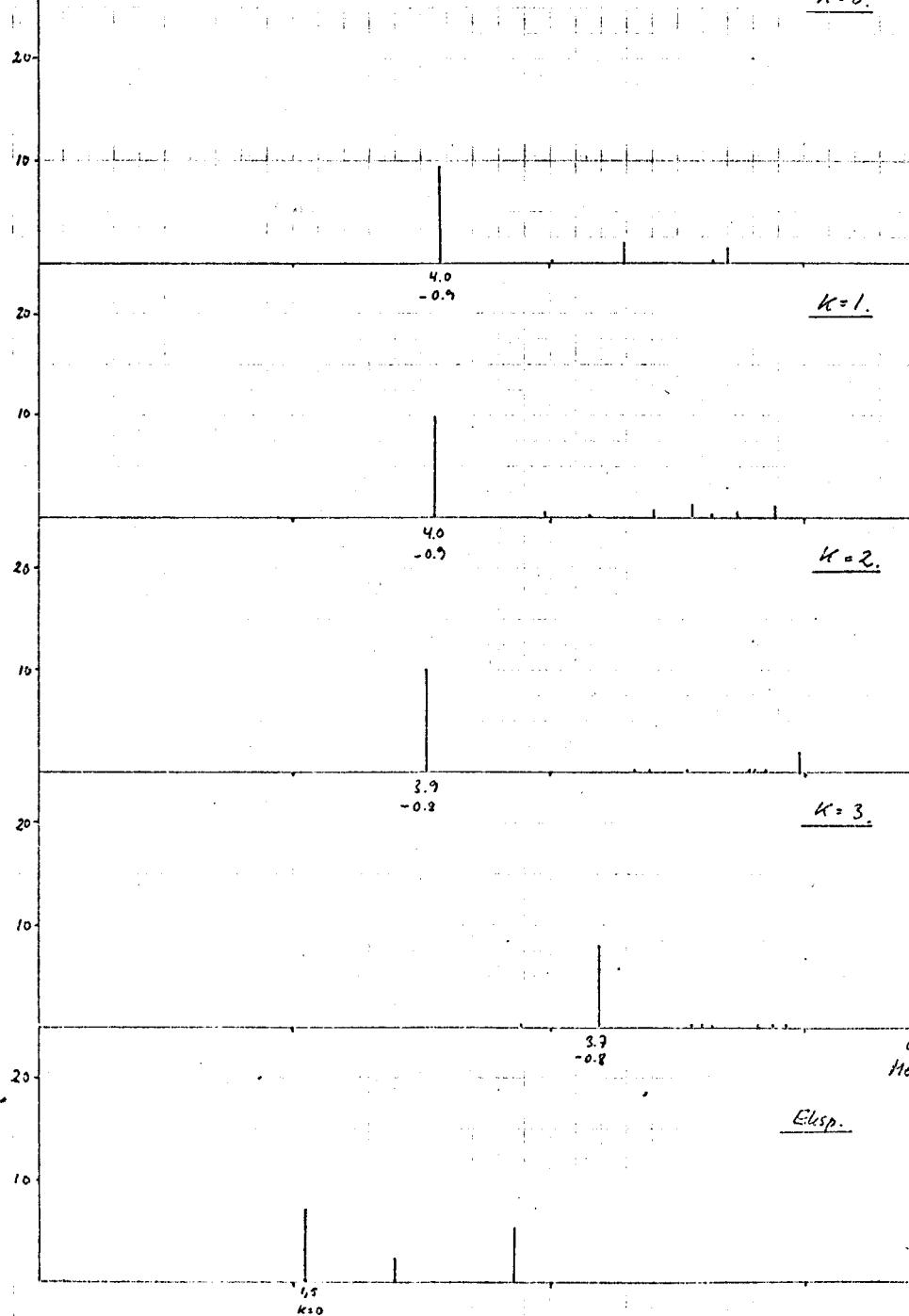
Tm 10 A 154

B(E3)

$10^{-24} e^2 \text{ cm}^6$

Bergen:

K=0.



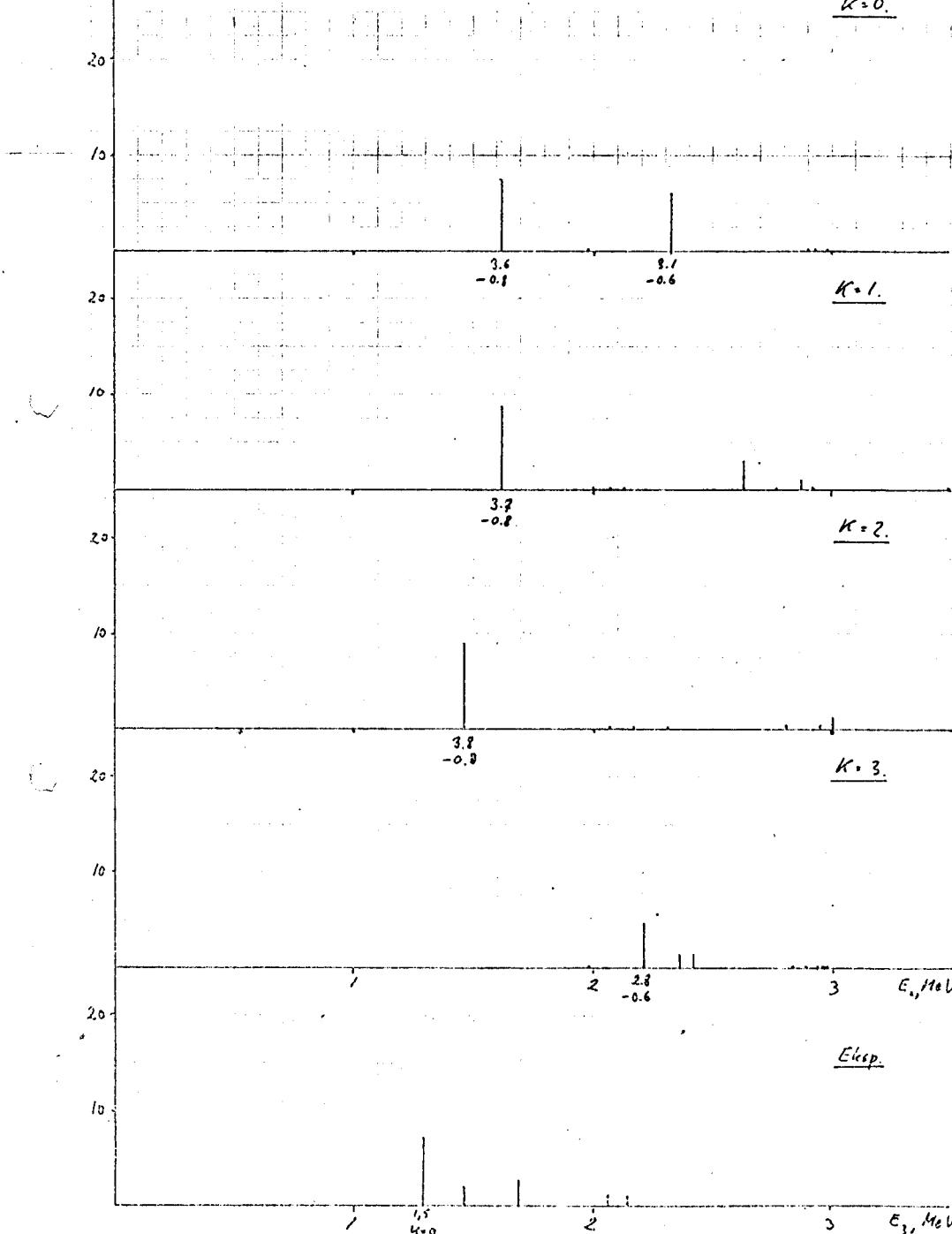
Ta. 12. G.A.<sup>162</sup>

B(E3)

$10^{-24} e^2 \text{ cm}^6$

Bergen:

K=0.



Ta. 12. C. 1<sup>160</sup>

$B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{cm}^6$ 

Gesuchte Werte für die Berechnung der E3-Wechselwirkung

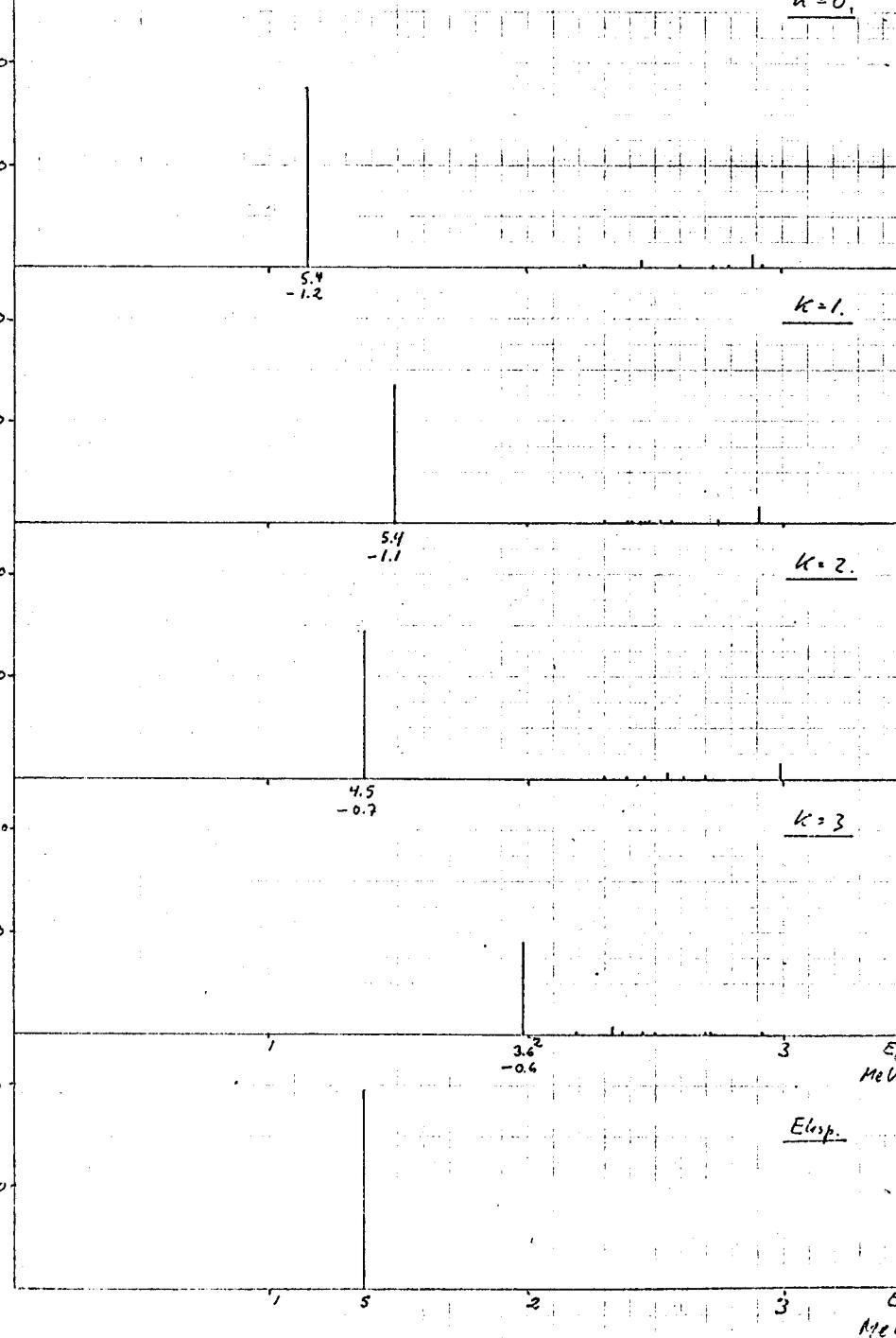
Berechnet: $K=0.$ 

Fig. 14 Dec 1956

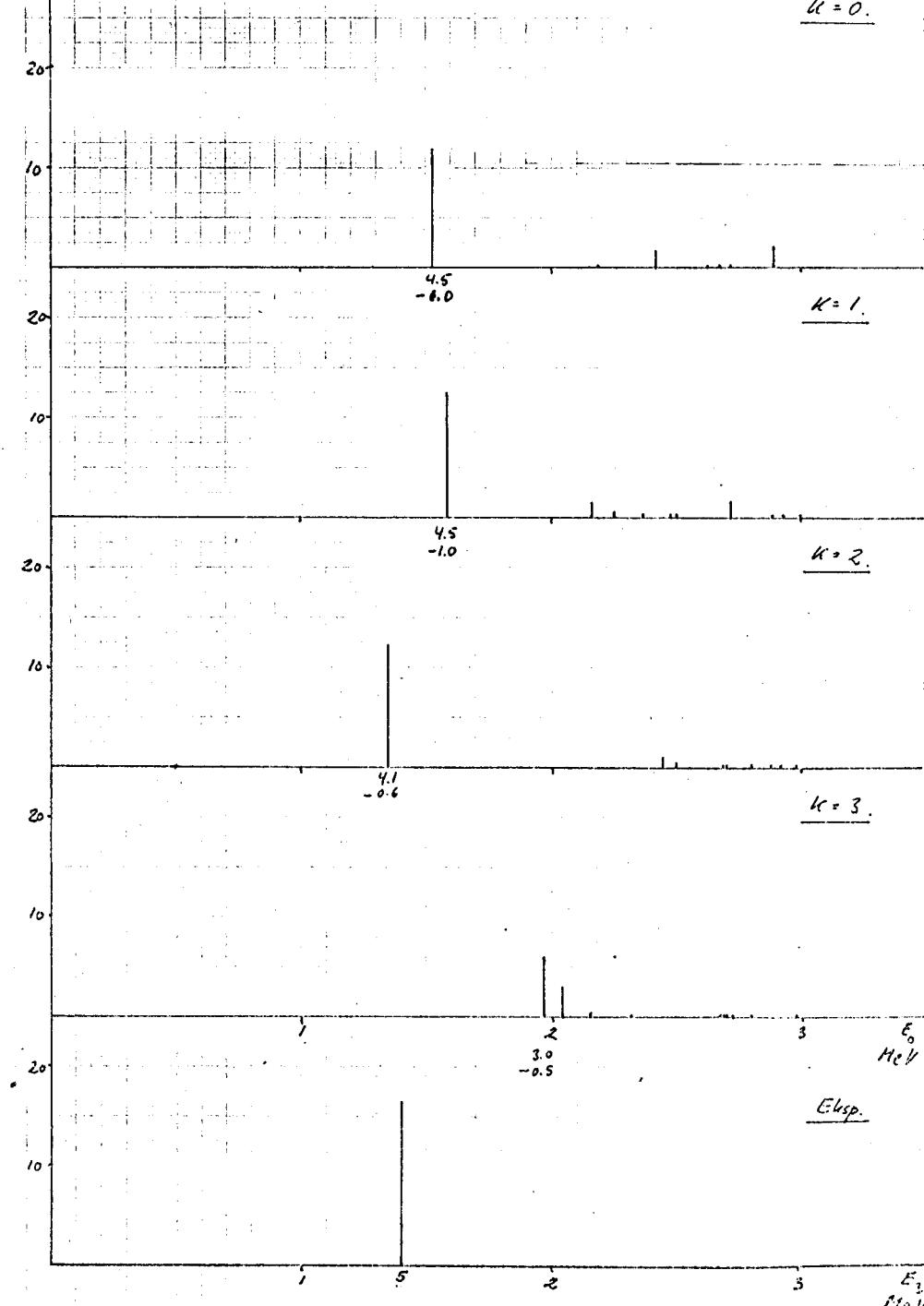
 $B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{cm}^6$ Berechnet: $K=0.$ 

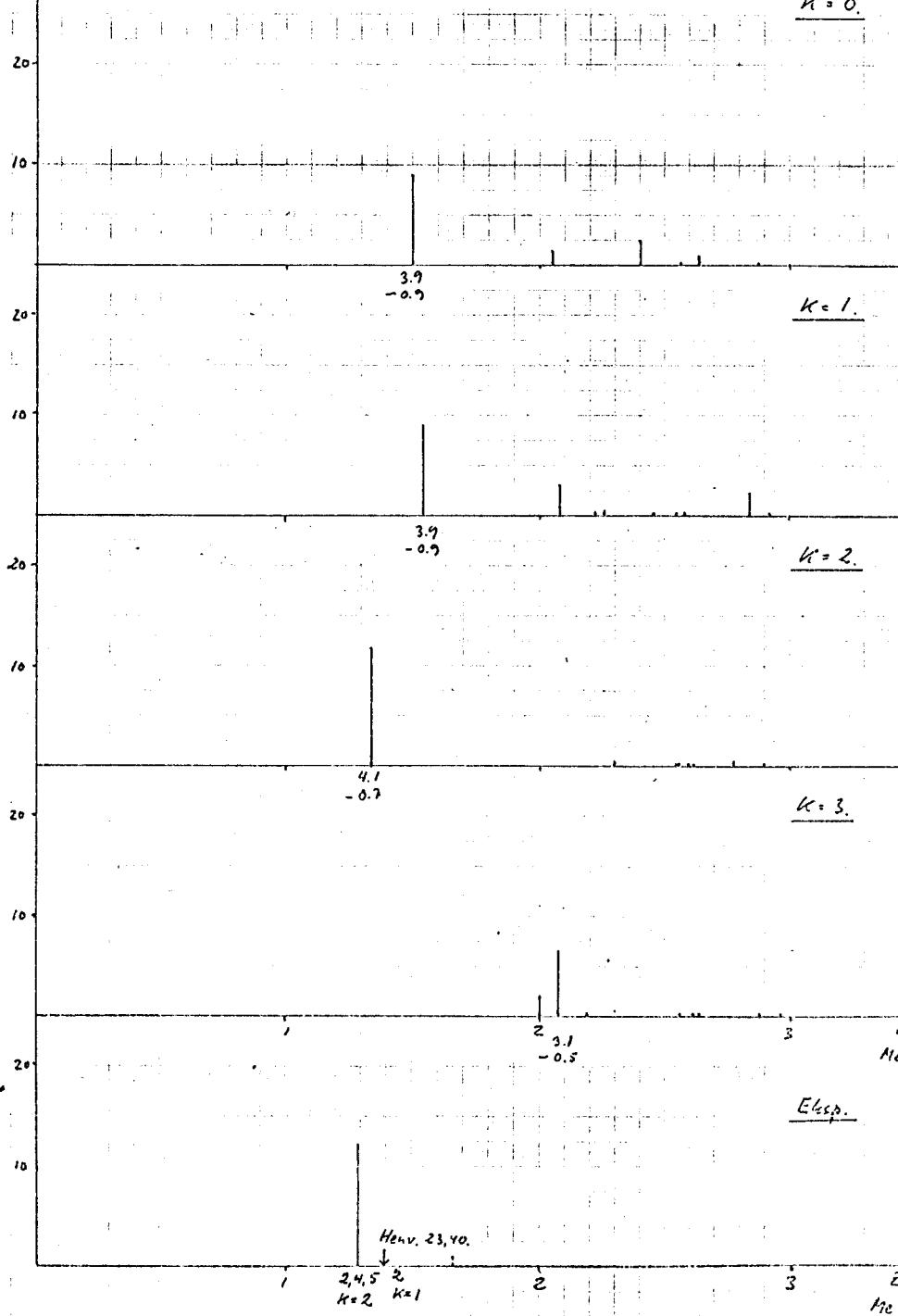
Fig. 15 Dec 1956

$B(E3)$ 

$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$

Berechnet:

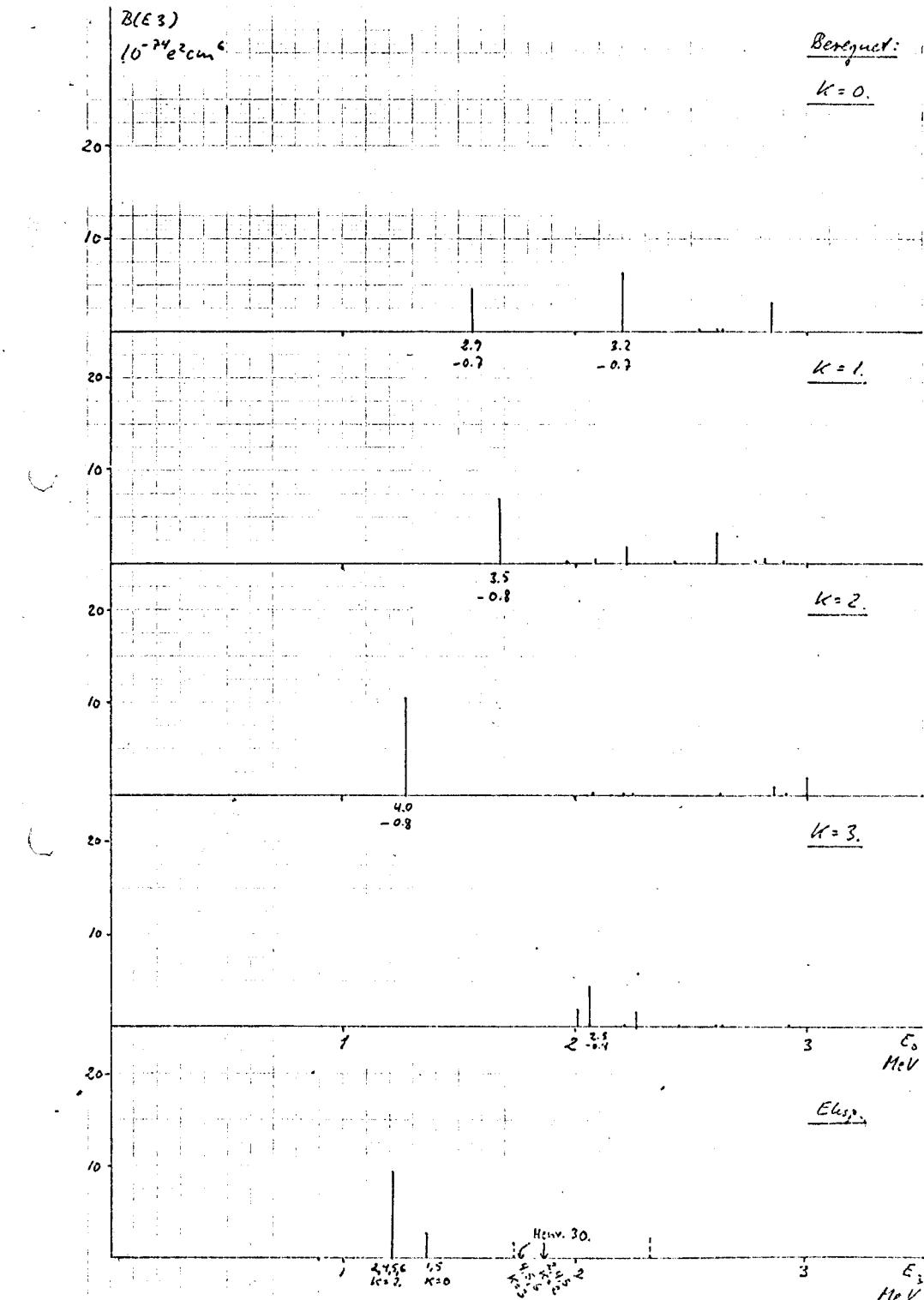
$K=0.$

 $B(E3)$ 

$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$

Berechnet:

$K=0.$



$B(E3)$

$$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$$

Berechnet:

$$K=0.$$

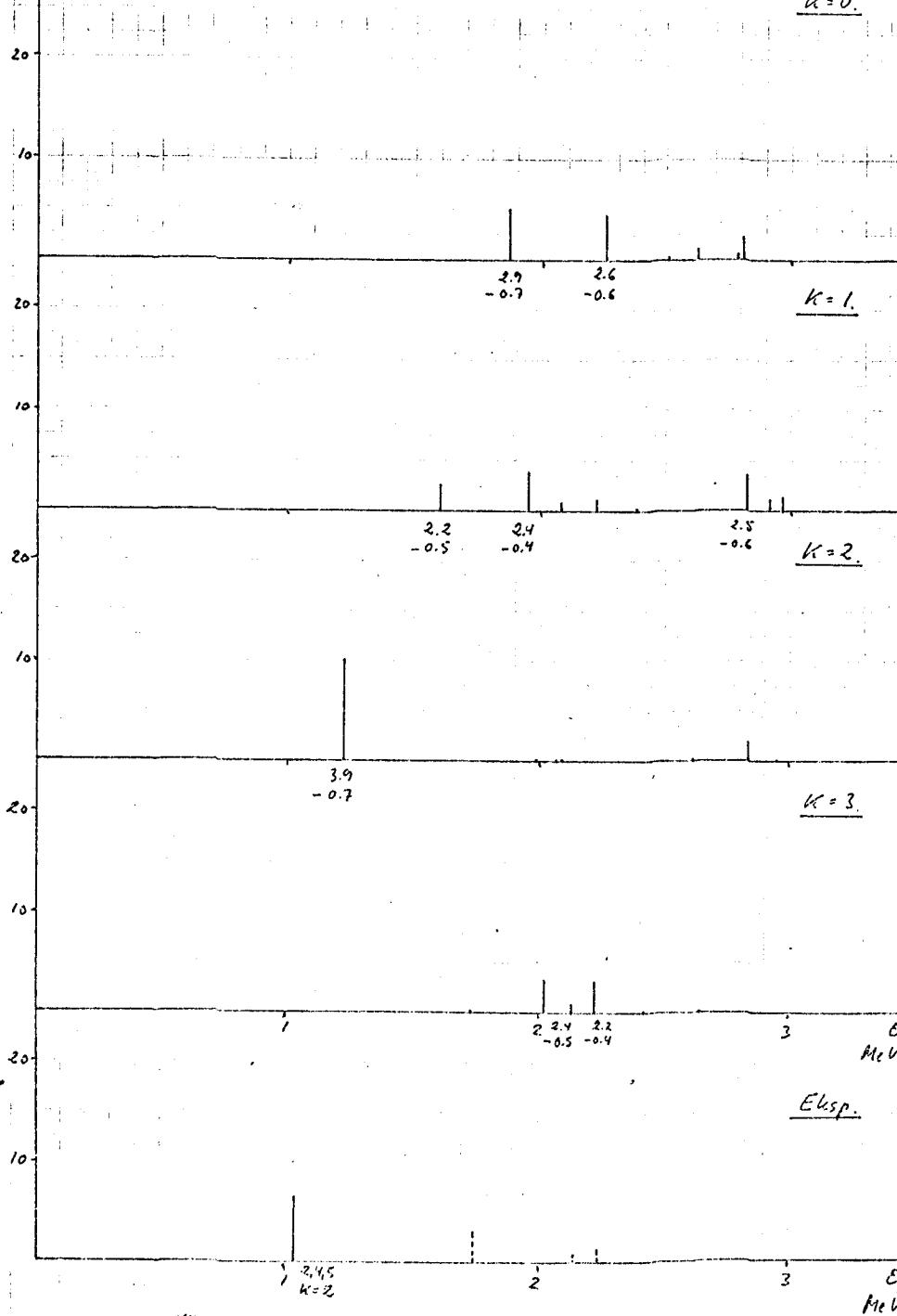


Fig. 18.  $\text{Dy}^{164}$

$B(E3)$

$$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$$

Berechnet:

$$K=0.$$

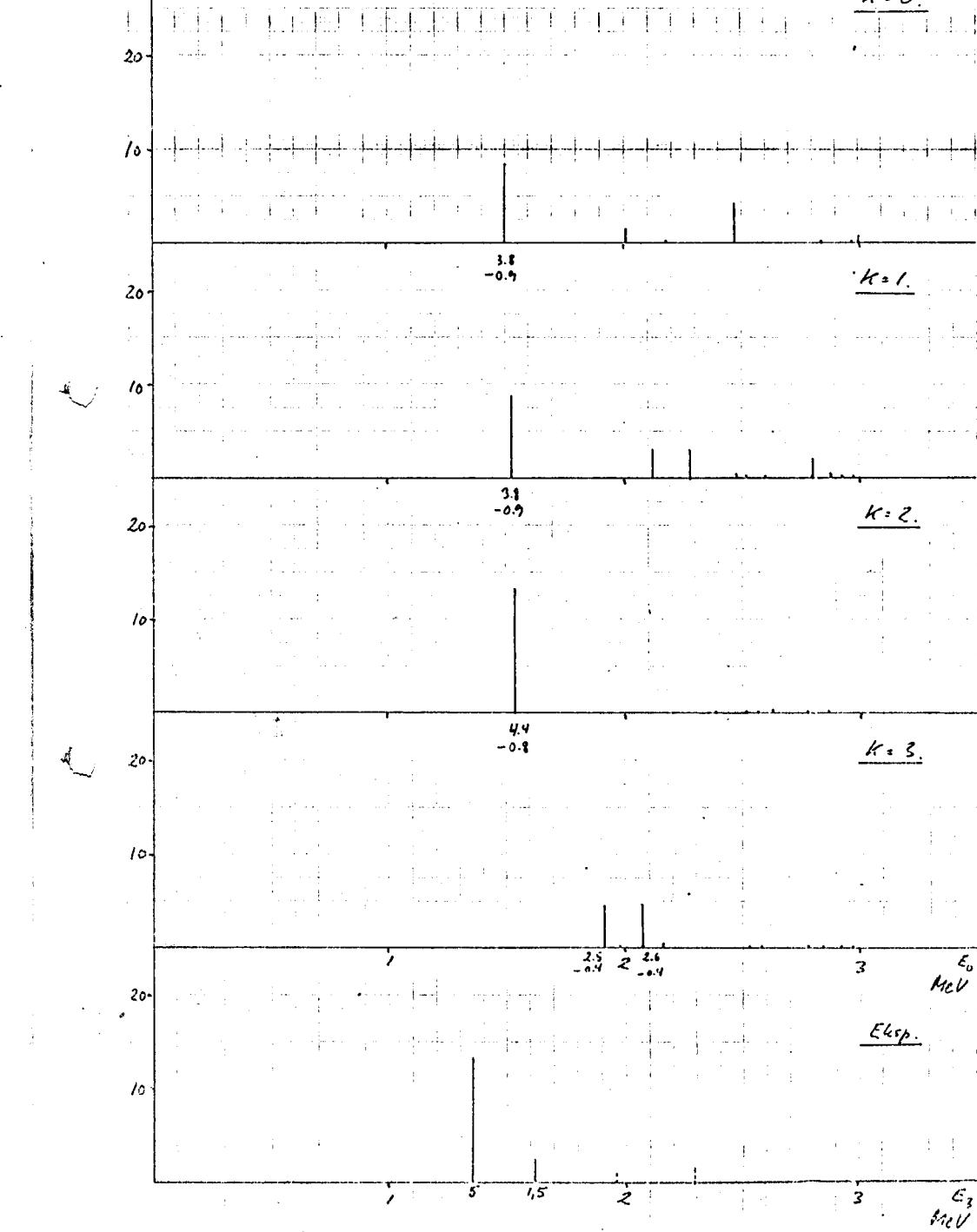


Fig. 19.  $\text{Fe}^{52}$

B(E3)

$10^{-24} \text{ e}^2 \text{cm}^6$

Berechnet:

K = 0.

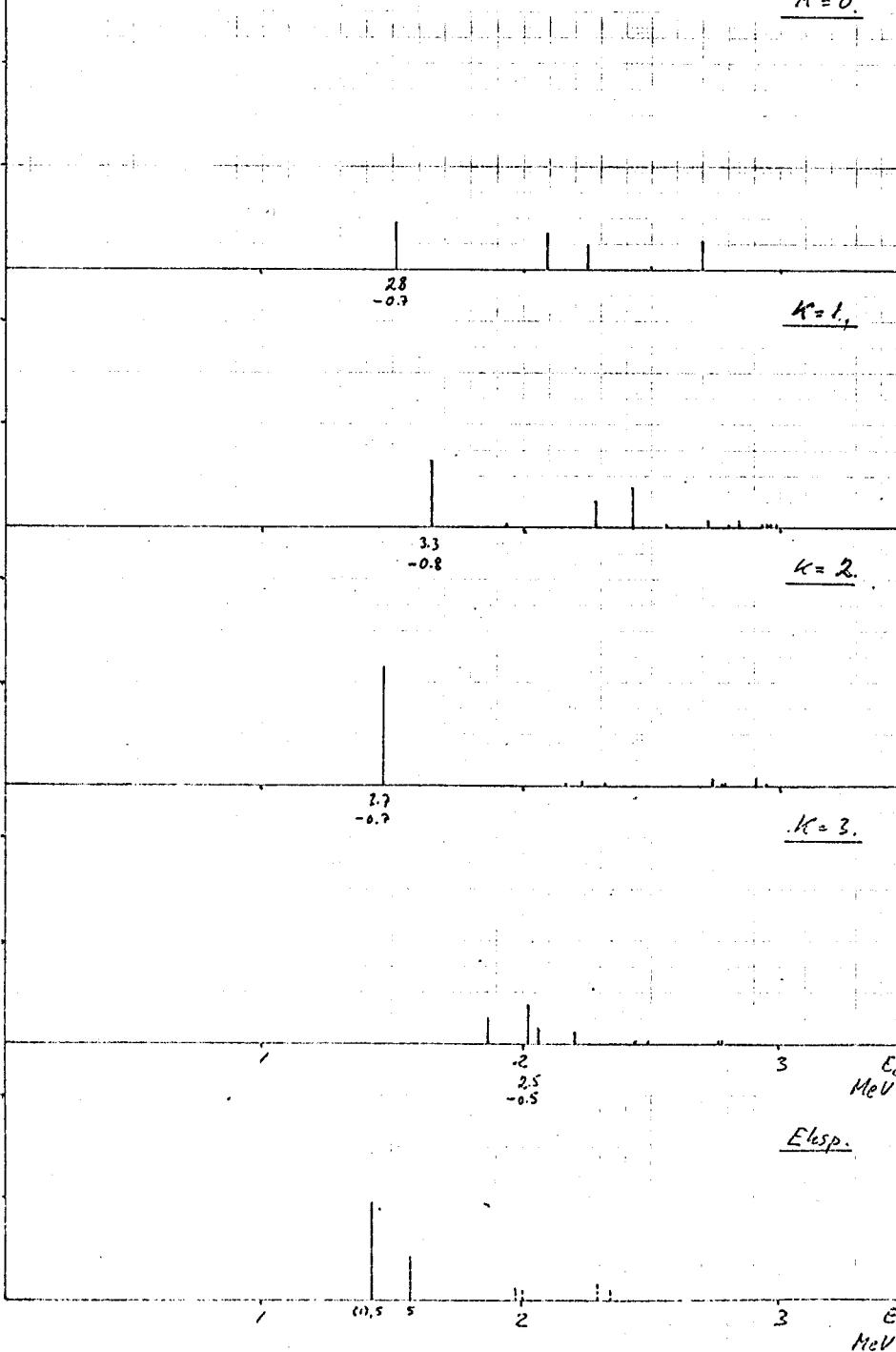


Fig. 20.  $E_2^{164}$

B(E3)

$10^{-24} \text{ e}^2 \text{cm}^6$

Berechnet:

K = 0.

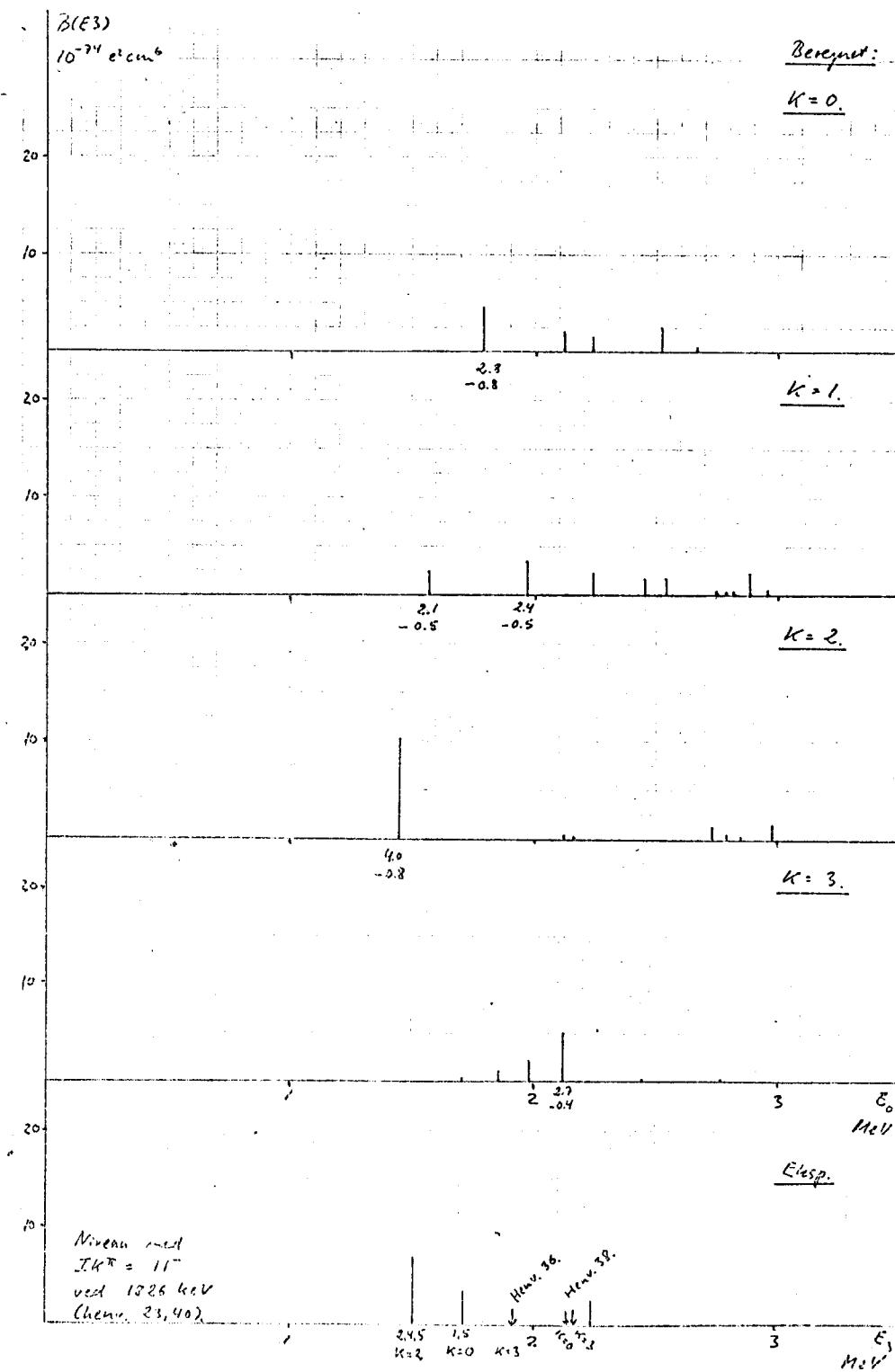
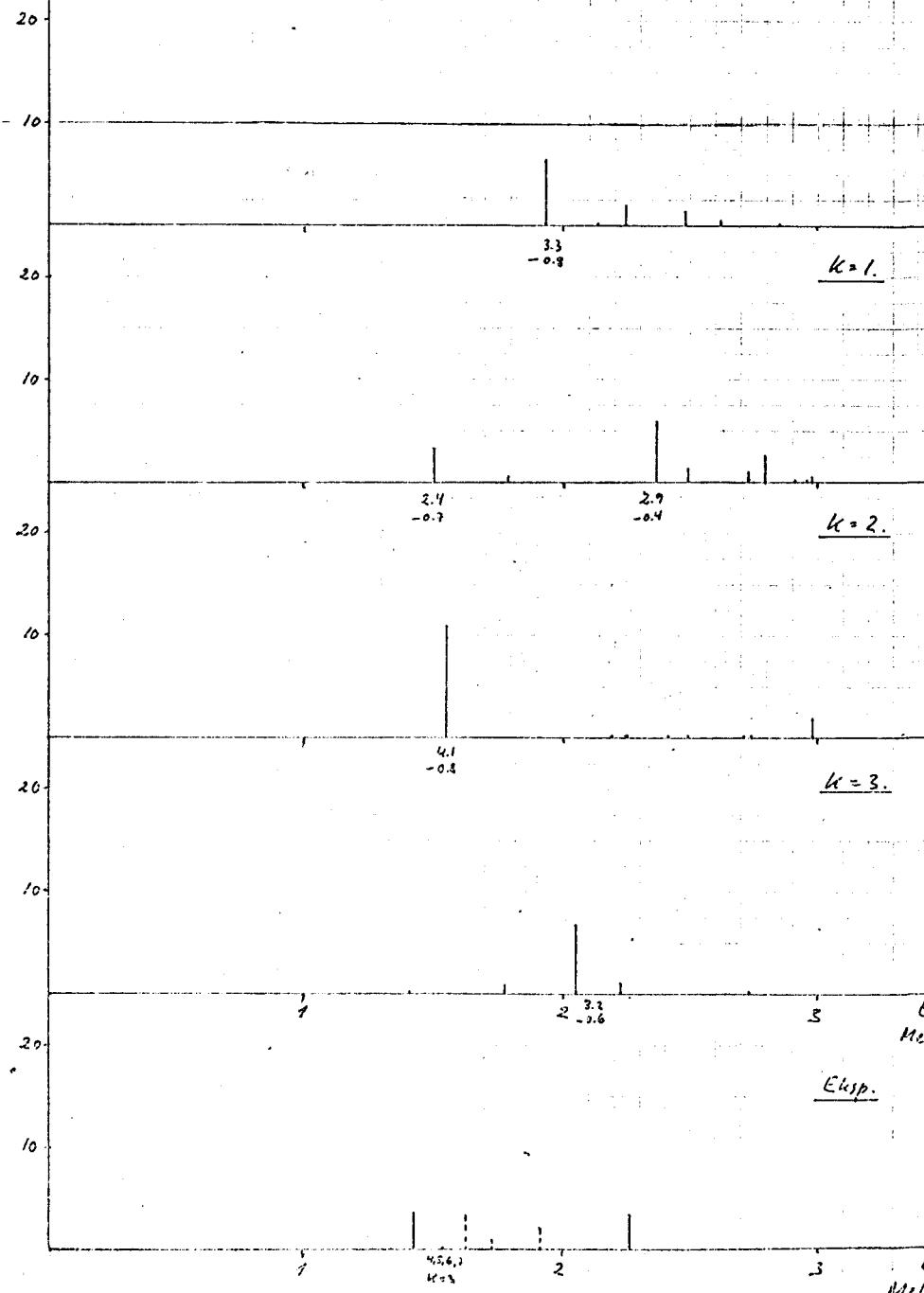


Fig. 21.  $E_2^{164}$

B(ε3)

$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$

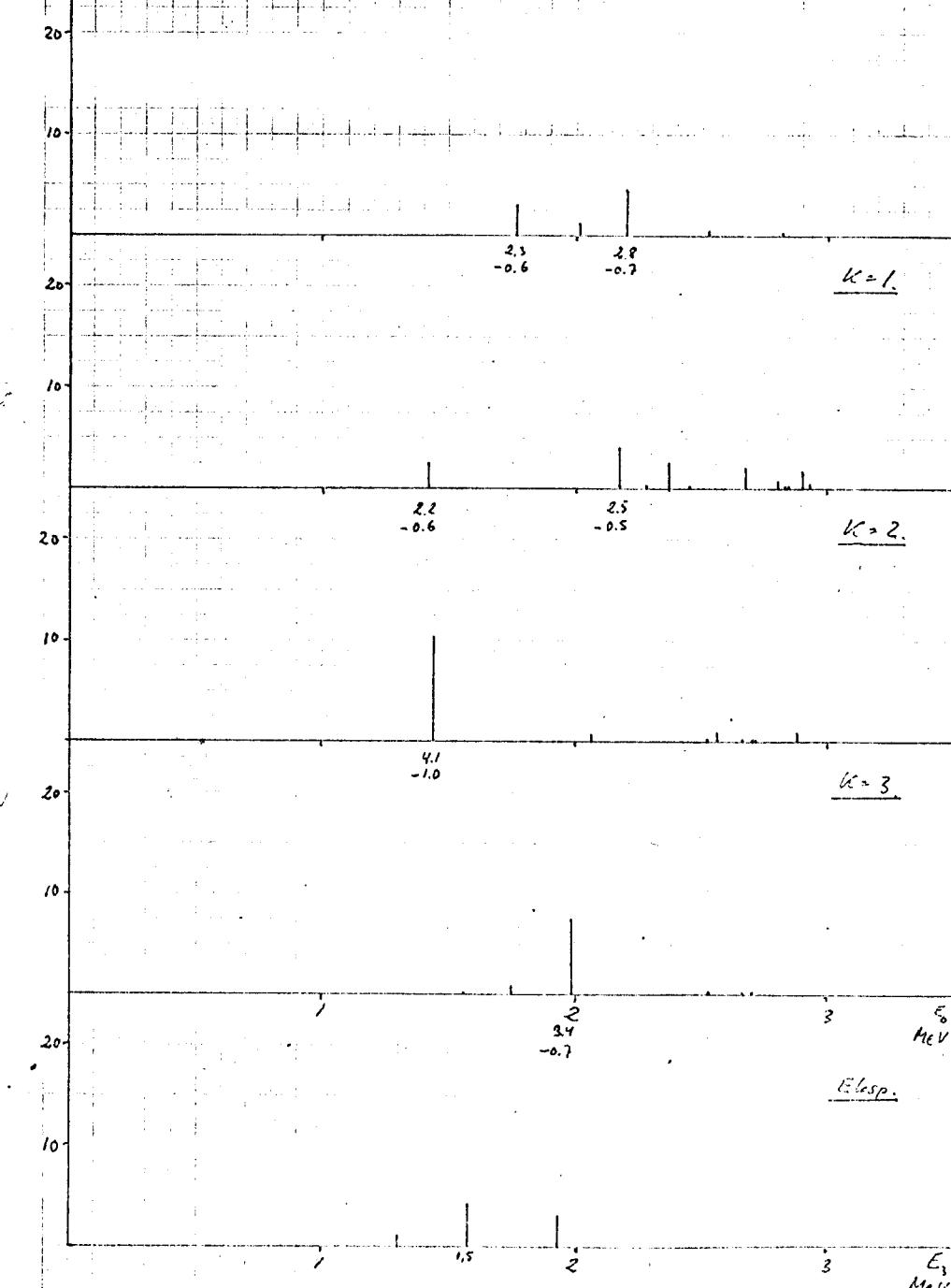


B(ε3)

$10^{-24} e^2 \text{cm}^6$

Beregnet:

$k = 0.$



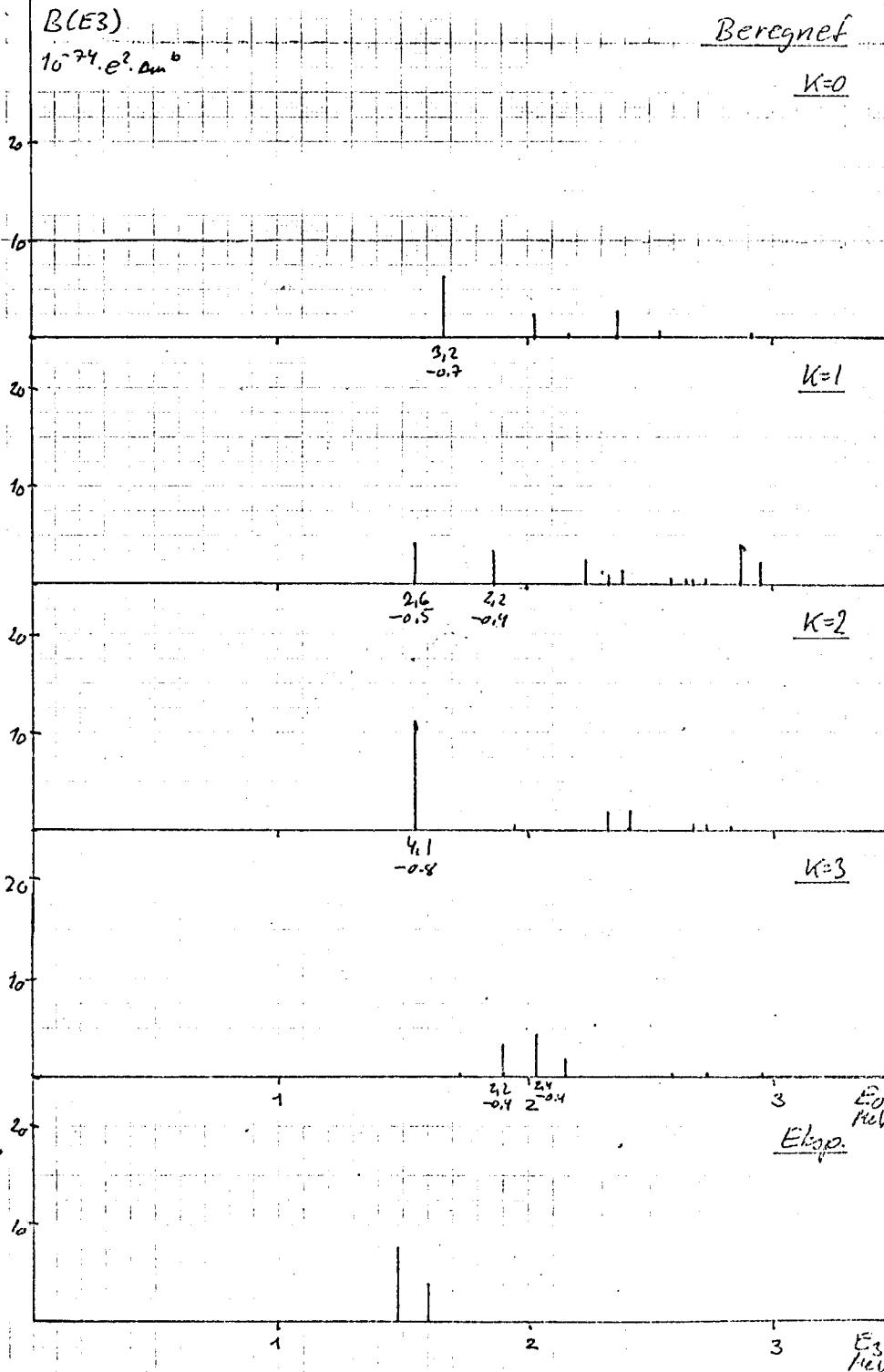


Fig. 24.  $\text{Y}_6^{168}$

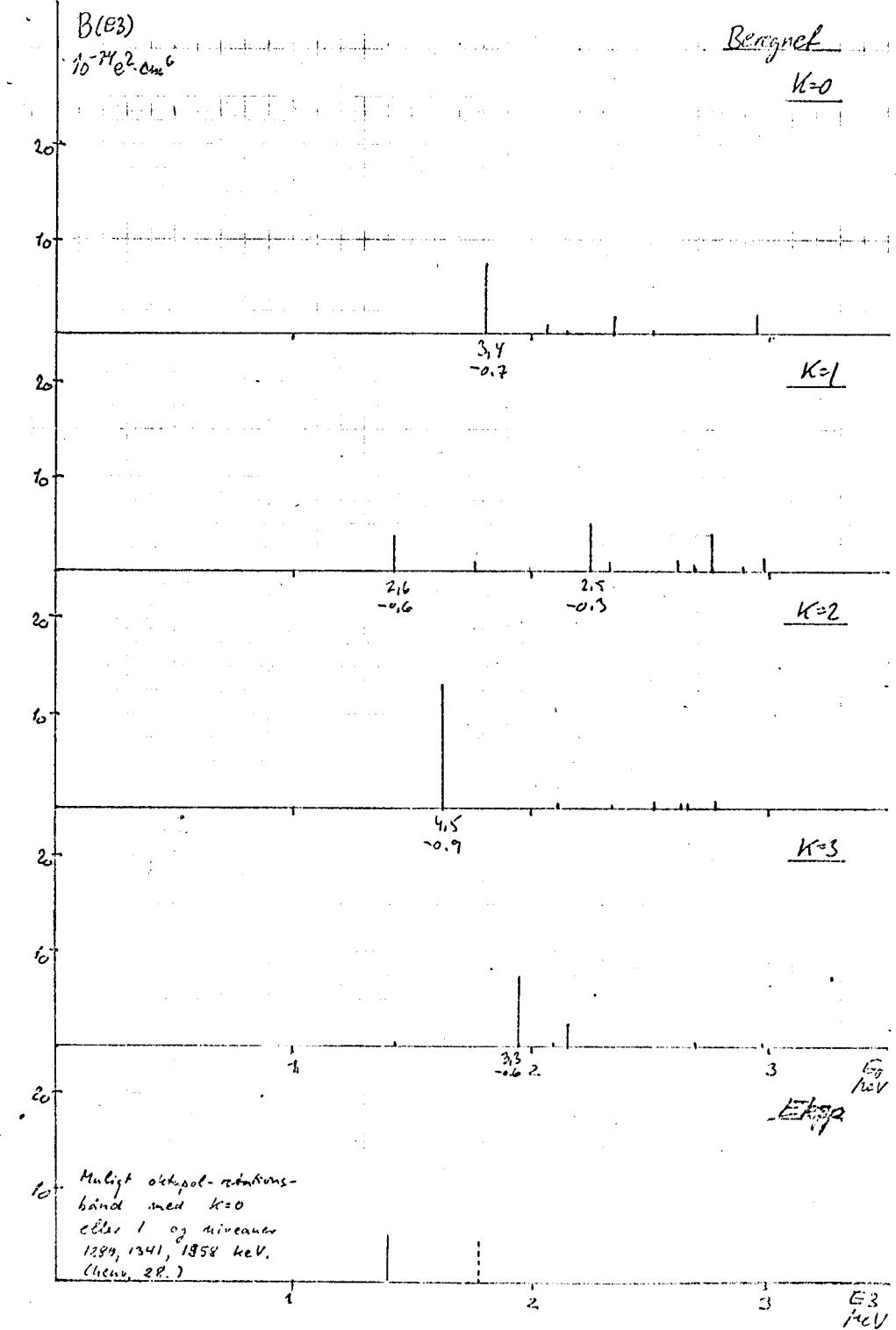


Fig. 25.  $\text{VI}^{170}$

Muligt odd-pair rotations-  
bind med  $K=0$   
eller 1 af niveauer  
1289, 1341, 1358 keV.  
(Chen, 28.)

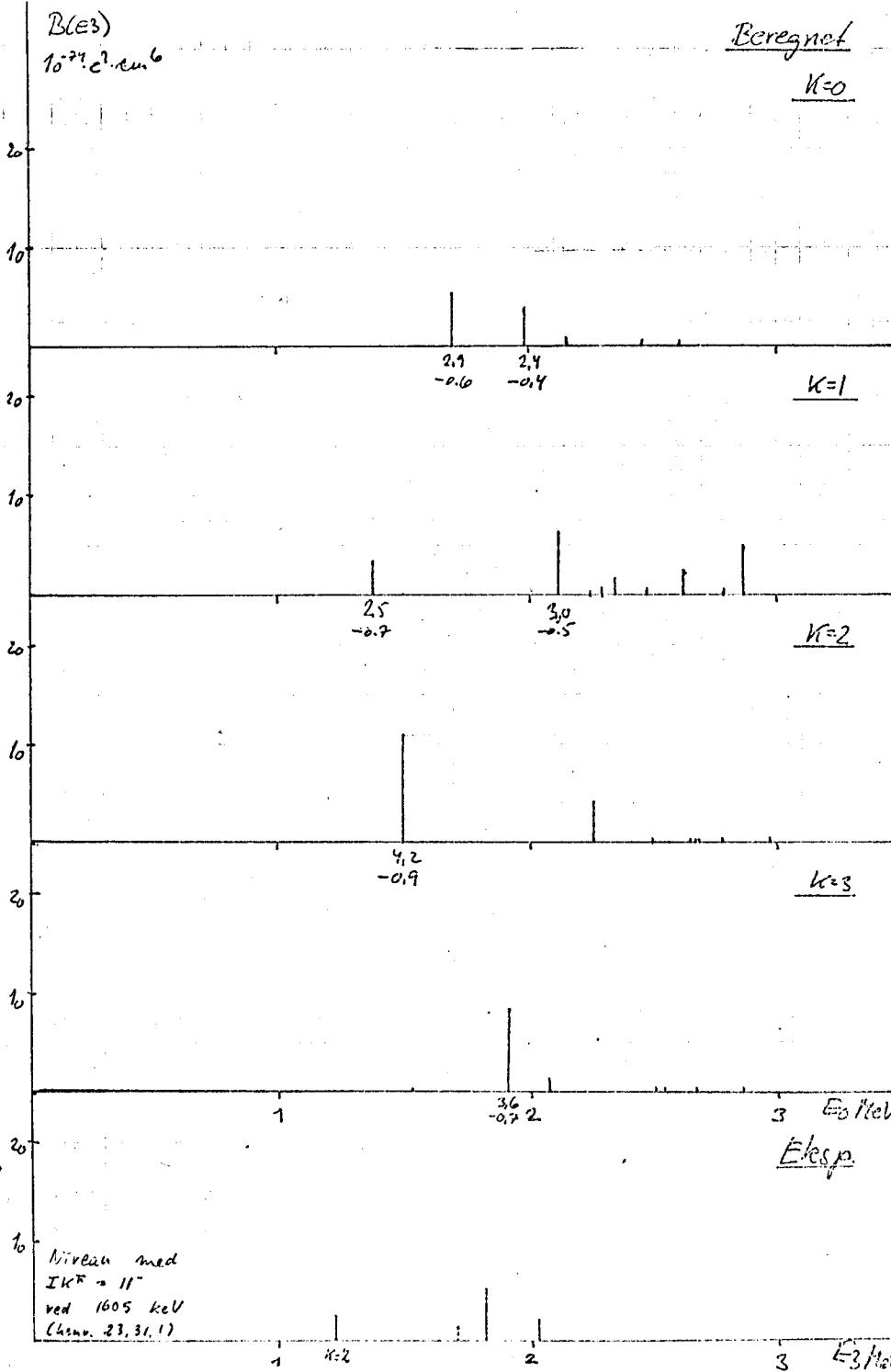


Fig. 26 Yb 172

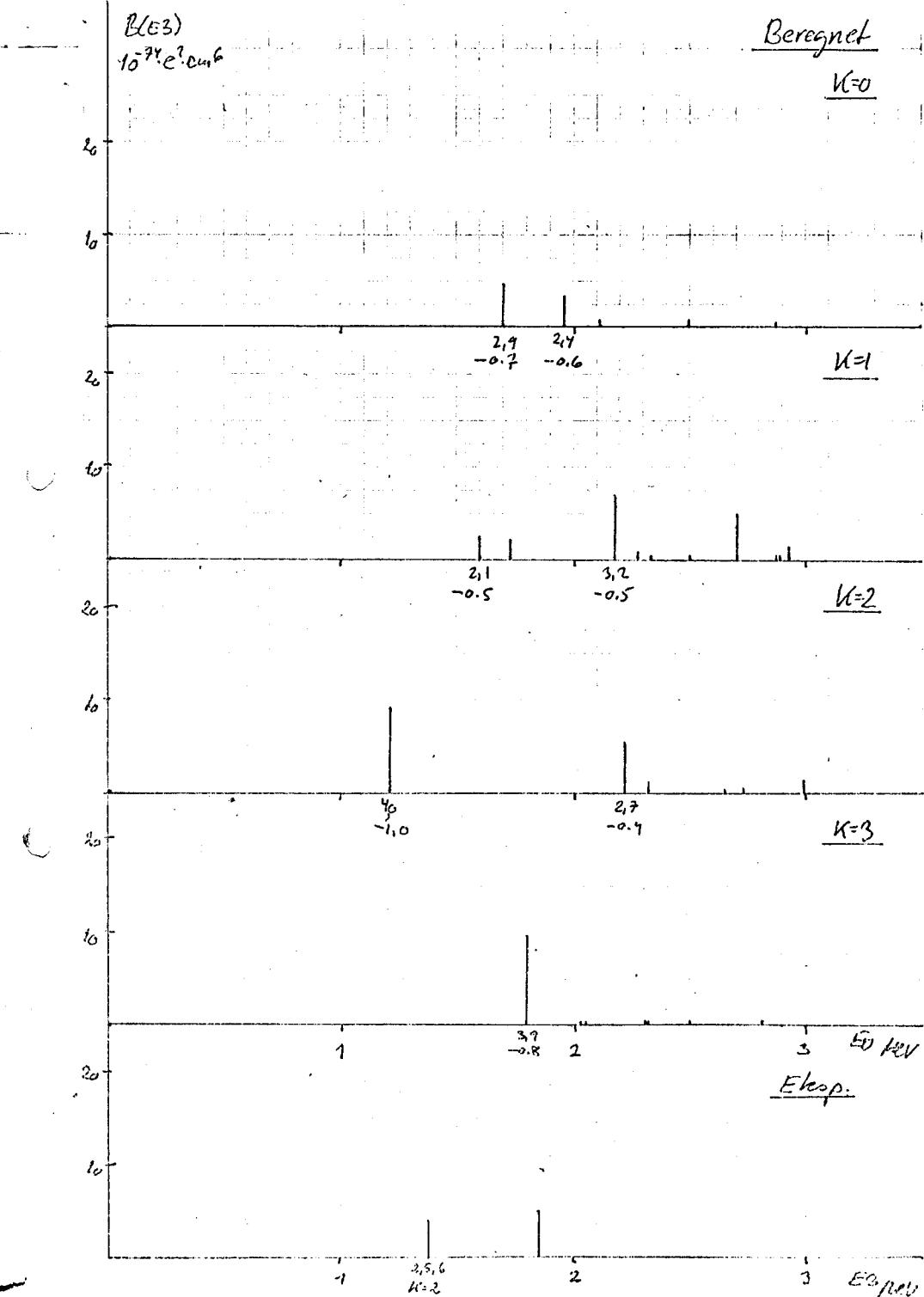


Fig. 27 Yb 172

$B(E3)$   
 $10^{-21} e^2 \cdot cm^2$

Beregnet

K=0

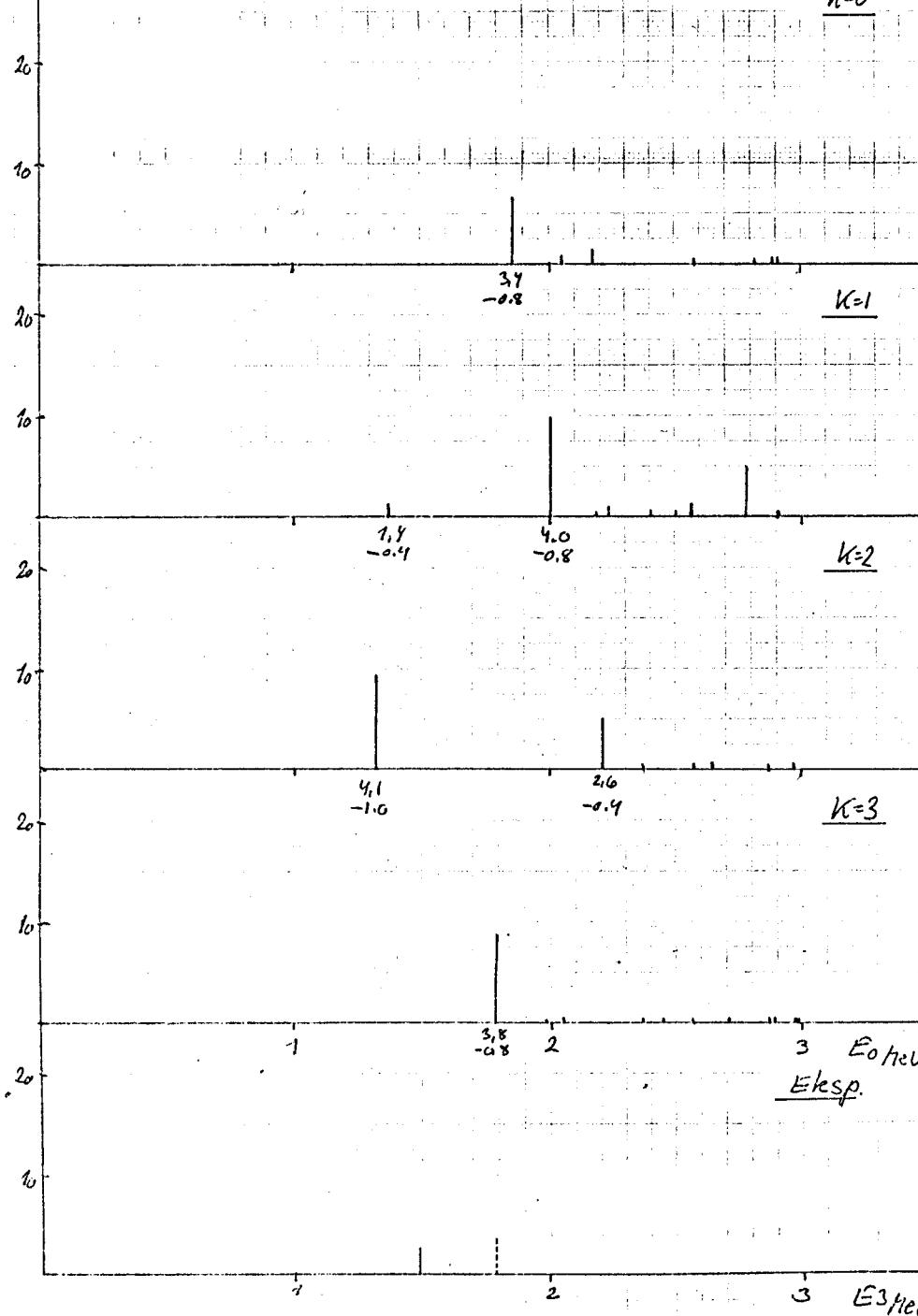


Fig. 28 11.196

$B(E3)$

$10^{-21} e^2 \cdot cm^2$

Beregnet

K=0

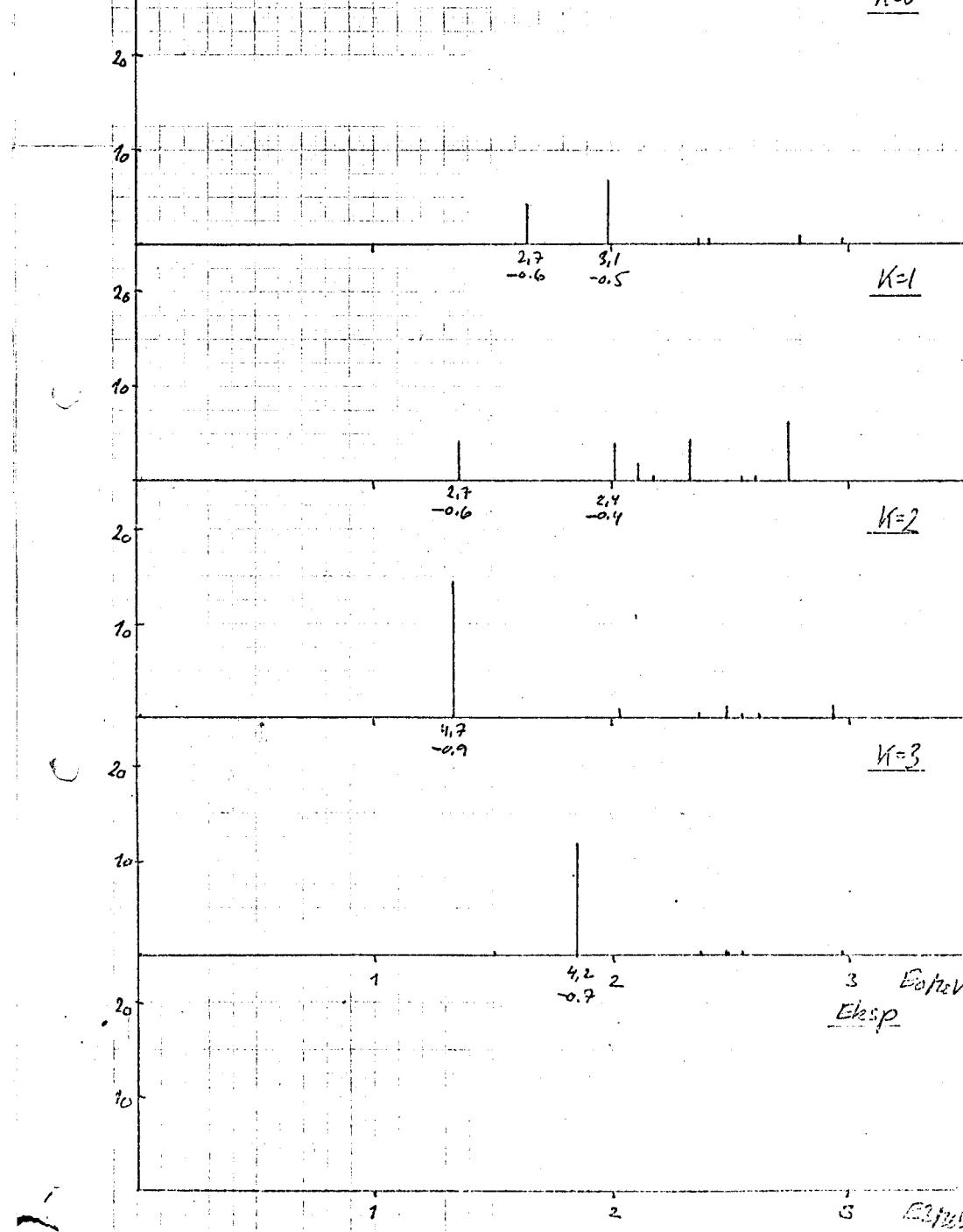


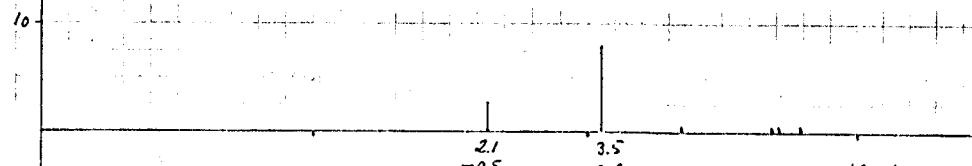
Fig. 29 14.1.74

$B(E3)$

$10^{-74} e^2 \text{ cm}^6$

Beregnet:

K=0.



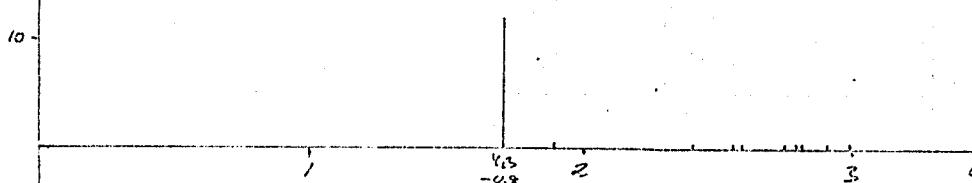
K=1.



K=2.



K=3.



E<sub>0</sub>

MeV

Ekspr.

Henv. 31:

K=1: 1<sup>-</sup> 1159, 2<sup>-</sup> 1228 keV.

K=2: 2<sup>-</sup> 1280 keV.

K=0: 1<sup>-</sup> 1722 keV.

Henv. 31.

Henv. 31.

E<sub>3</sub>  
MeV

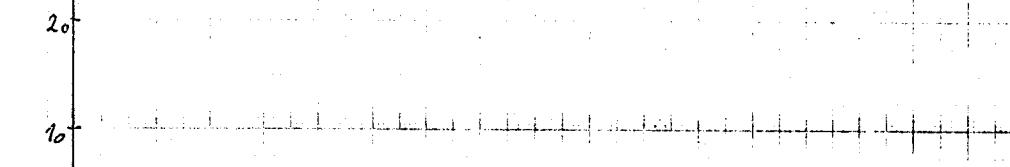
Fig. 20  $\text{Mn}^{176}$

$B(E3)$

$10^{-74} e^2 \text{ cm}^6$

Beregnet

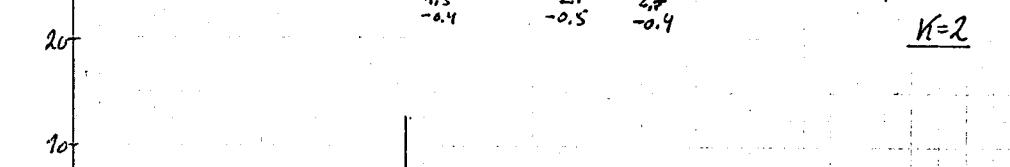
K=0



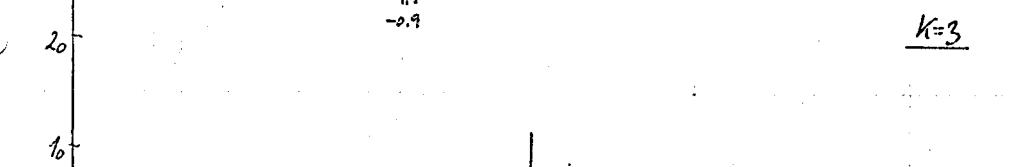
K=1



K=2



K=3



3 E<sub>3</sub> keV

Ekspr.

Henv. 37.

3.4.5  
E<sub>3</sub> keV

3 E<sub>3</sub> keV

Fig. 31  $\text{Mn}^{178}$

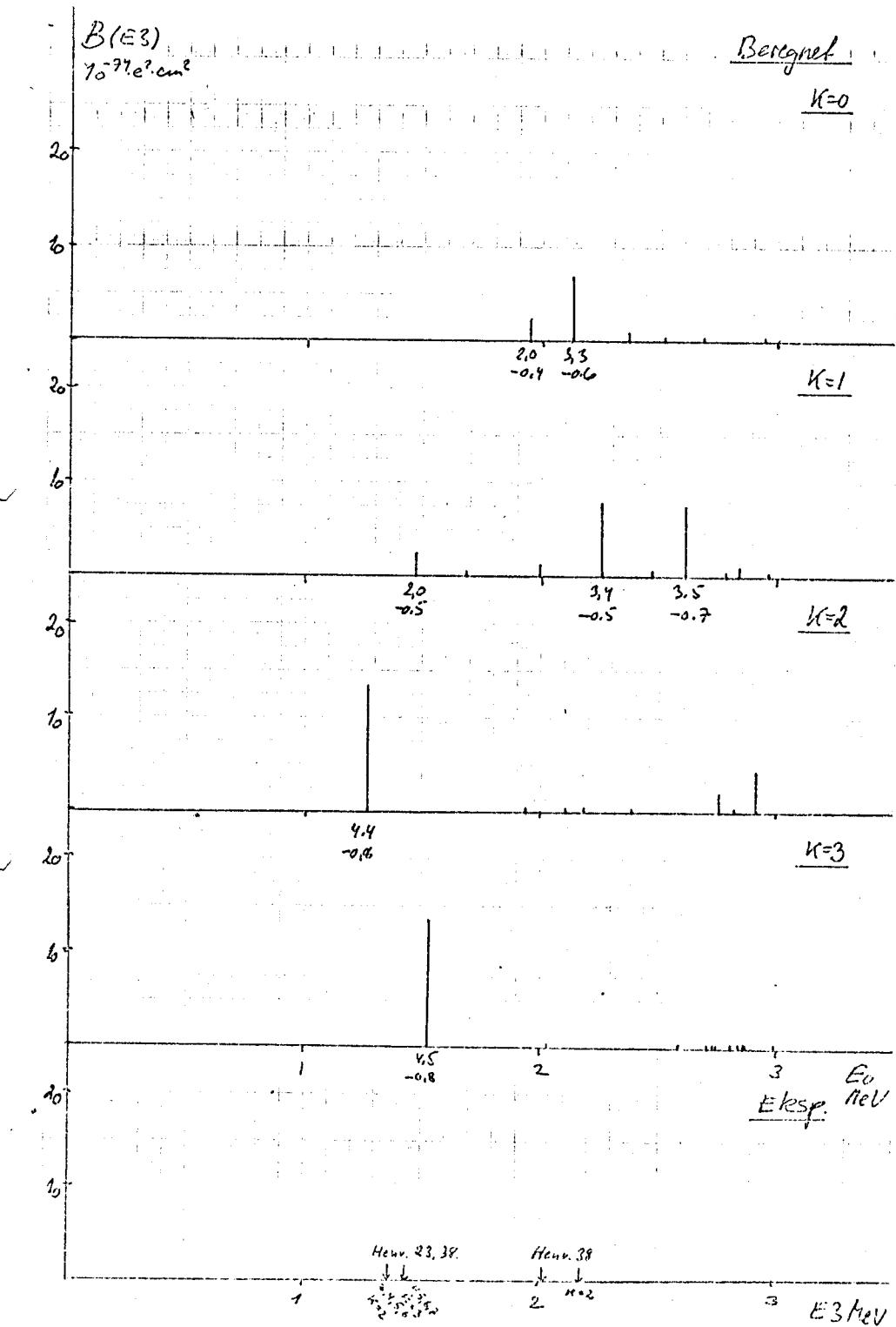
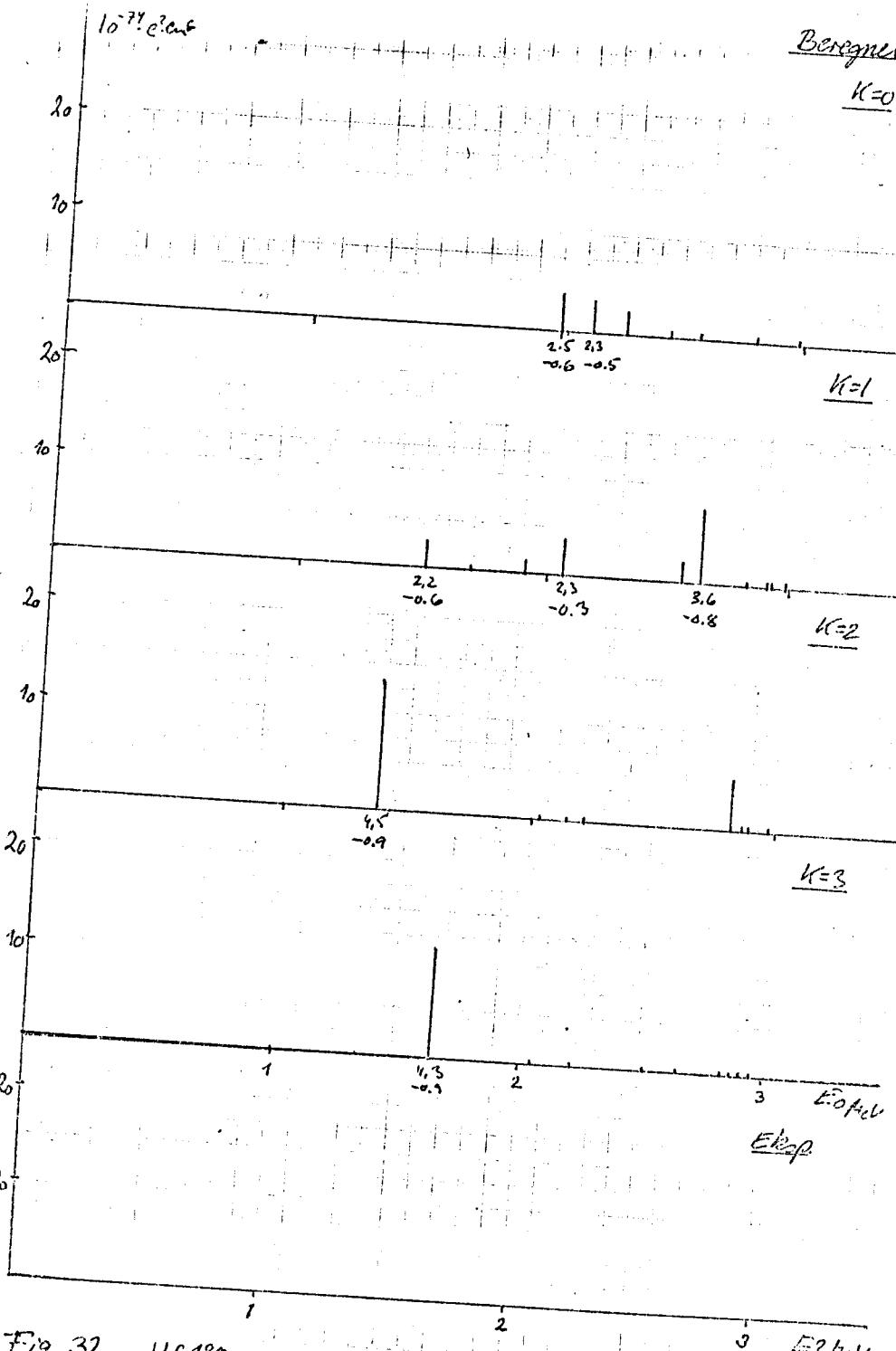


Fig. 32.  $\text{Hf}^{180}$

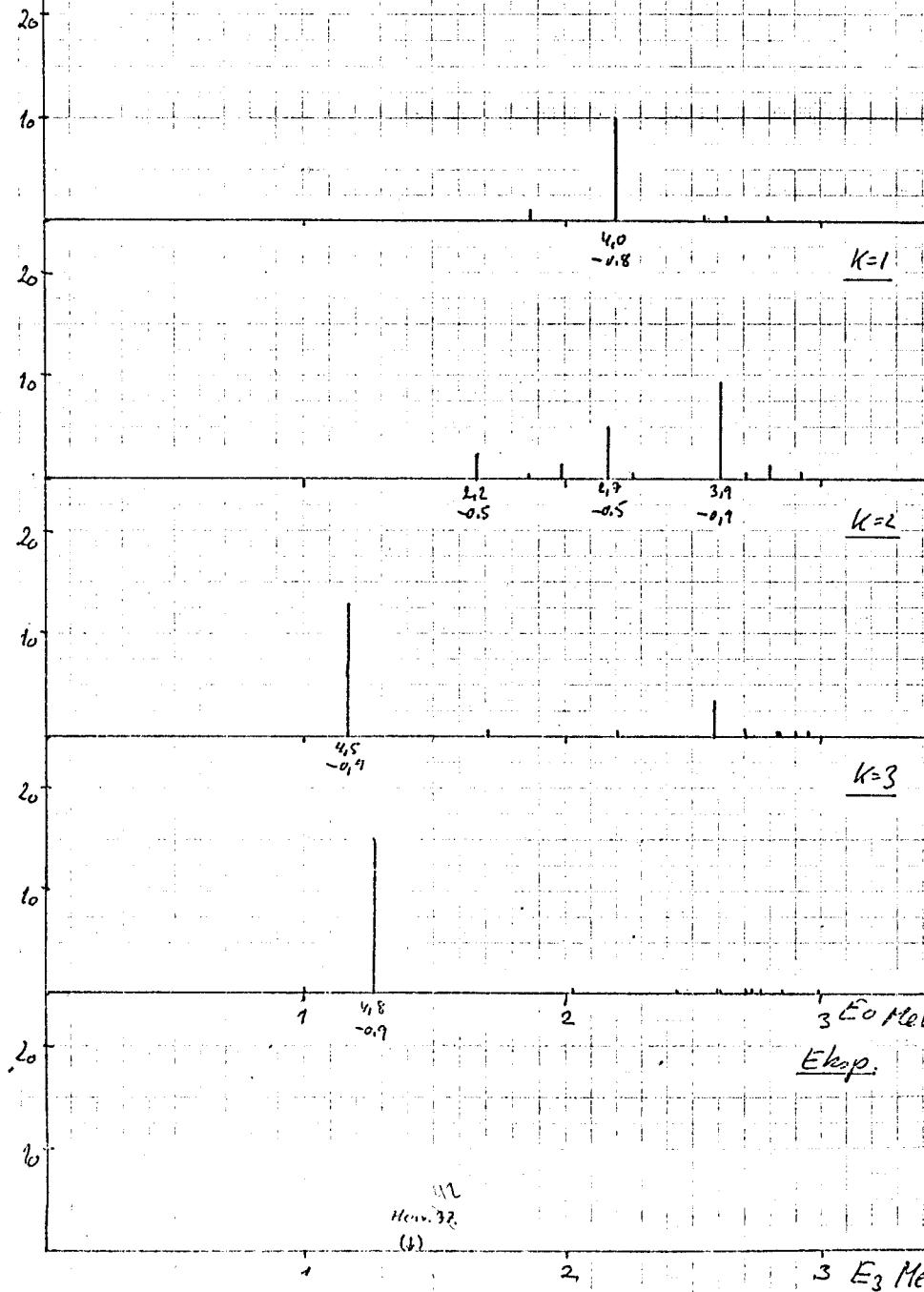
Fig. 33.  $\text{W}^{182}$

$B(E3)$

$10^{-24} e^2 \text{ cm}^6$

Berechnet

K=0



$B(E3)$

$10^{-24} e^2 \text{ cm}^6$

Berechnet

K=0

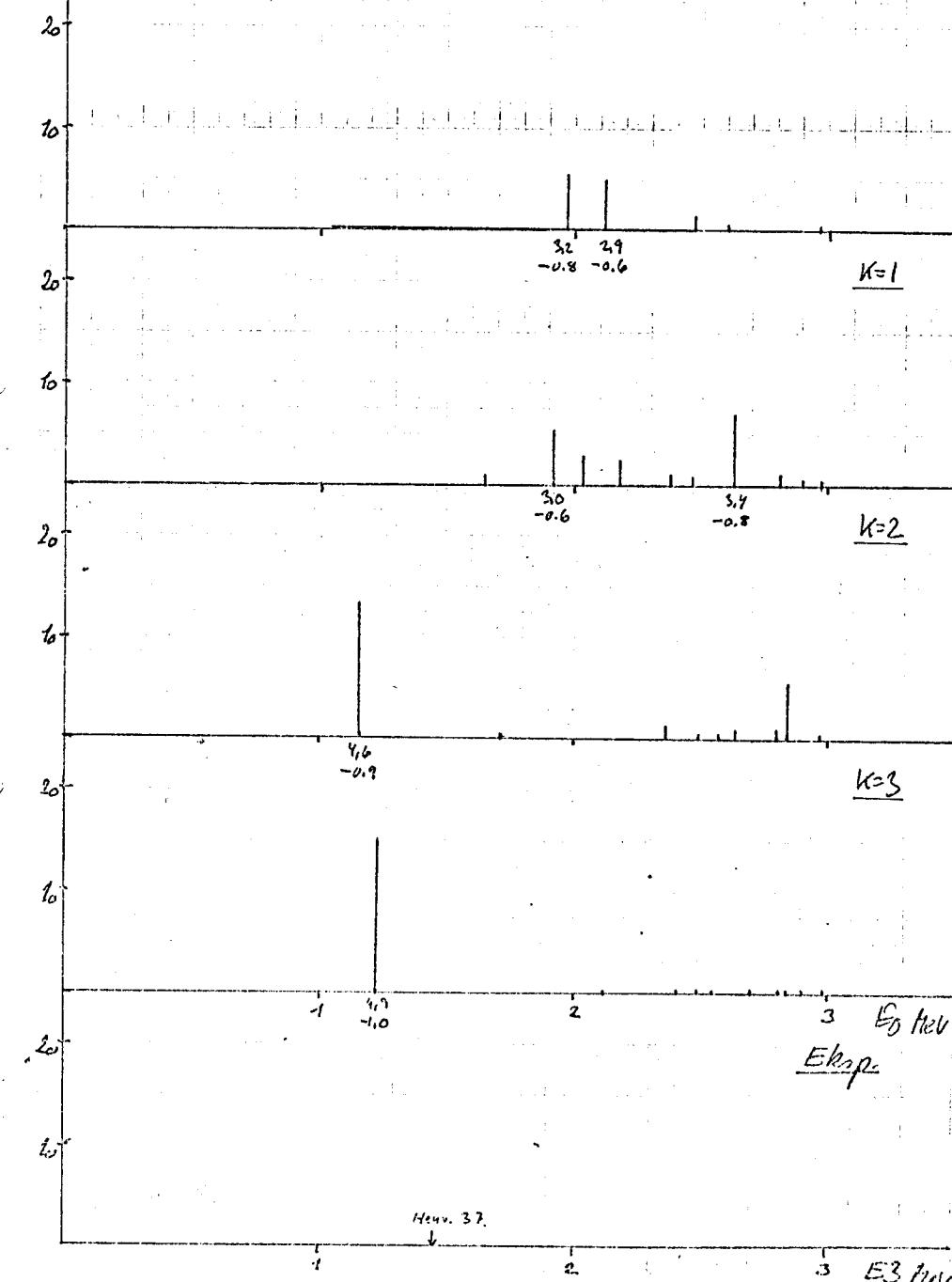
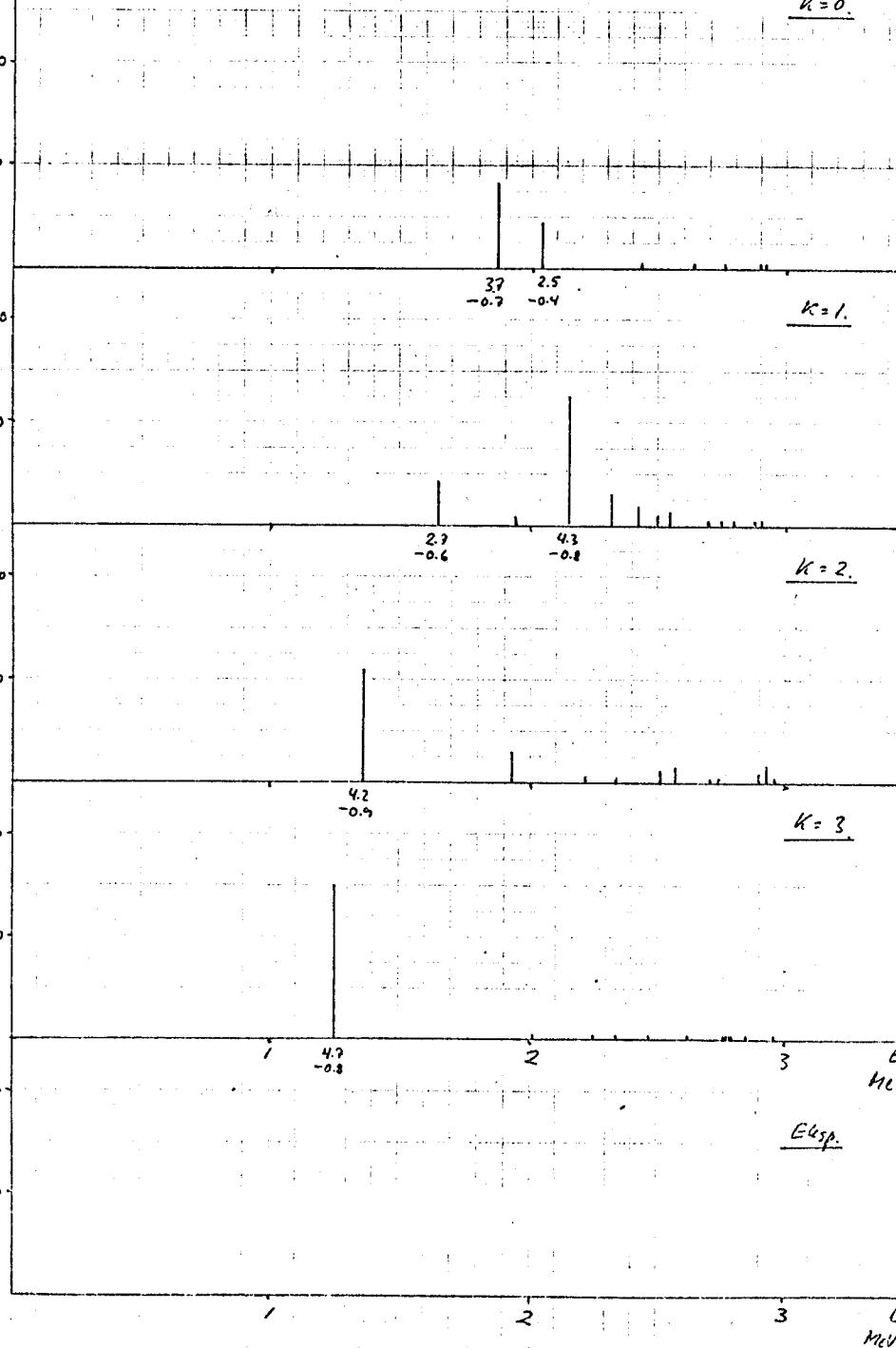
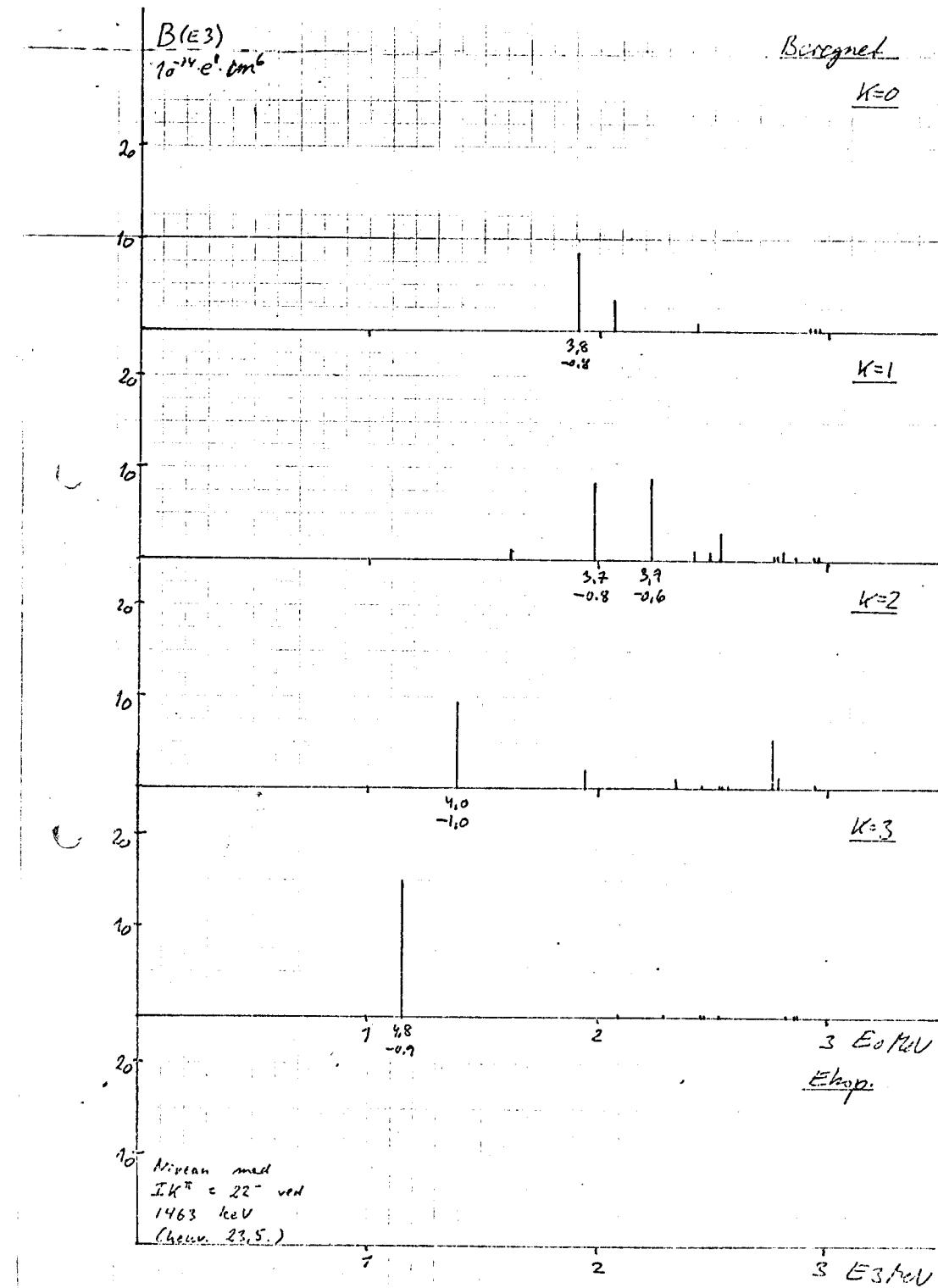


Fig. 34 18/184

Fig. 35 18/186

$B(E3)$  $10^{-24} e^+ cm^6$ Beregnet: $K=0$ Fig. 36.  $\alpha_3^{183}$  $B(E3)$  $10^{-24} e^+ cm^6$ Beregnet $K=0$ Fig. 37.  $\alpha_3^{183}$ 

Nivåen med

 $IK^{\pi} = 22^-$  ved

1463 keV

(Chenu 23.5.)

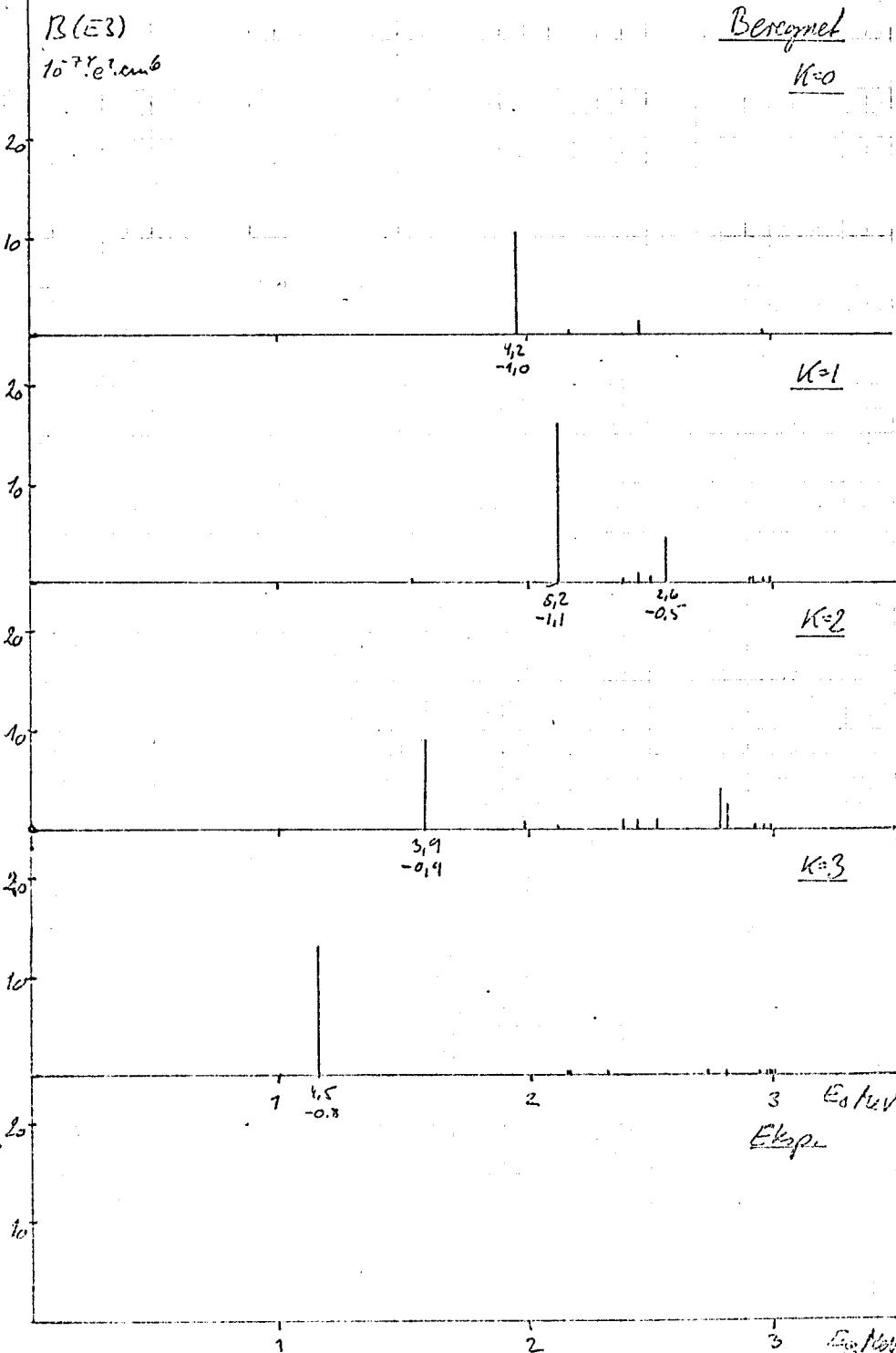


Fig. 38  $\Lambda_e^{190}$

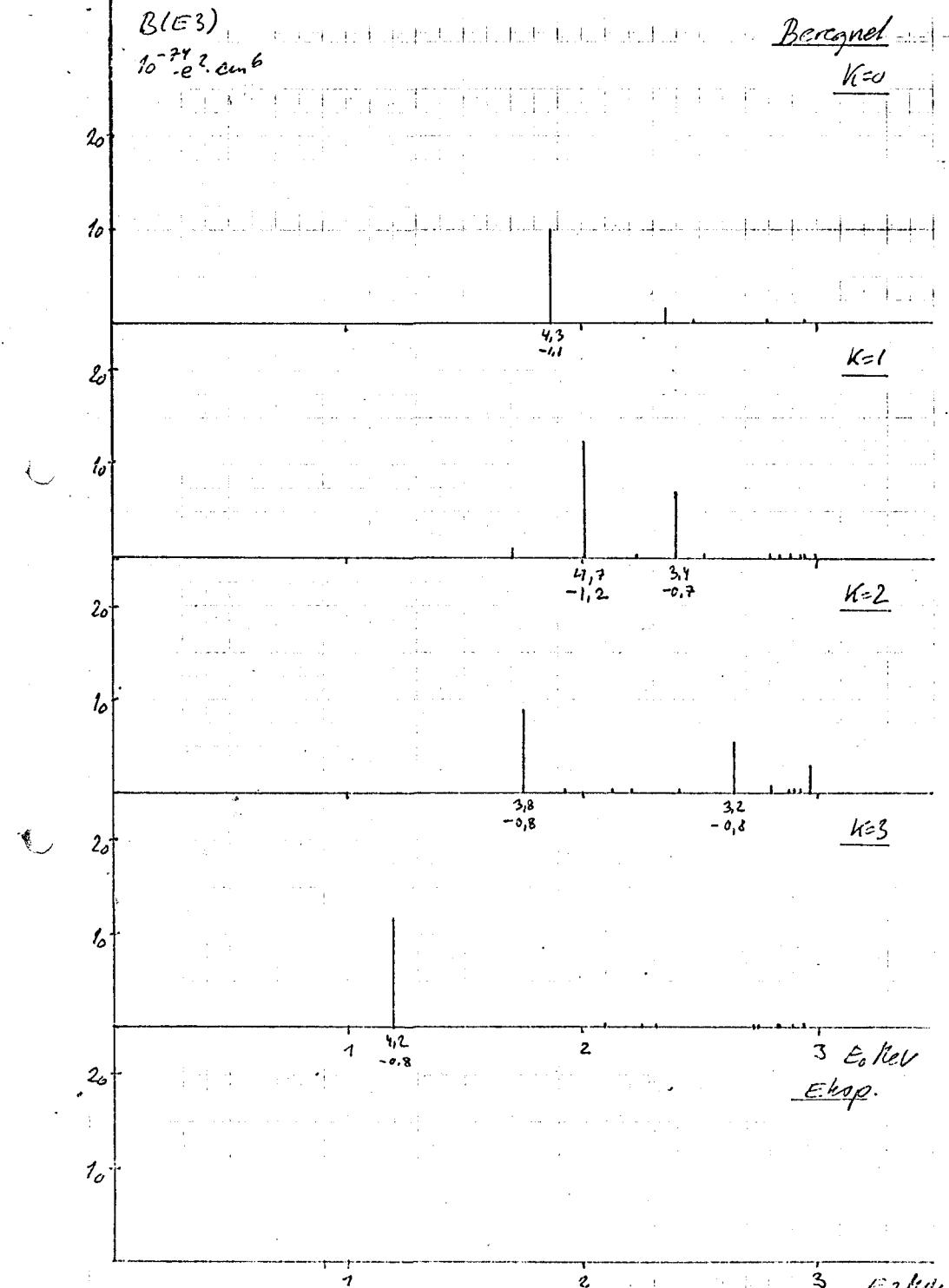


Fig. 39  $\Lambda_e^{190}$

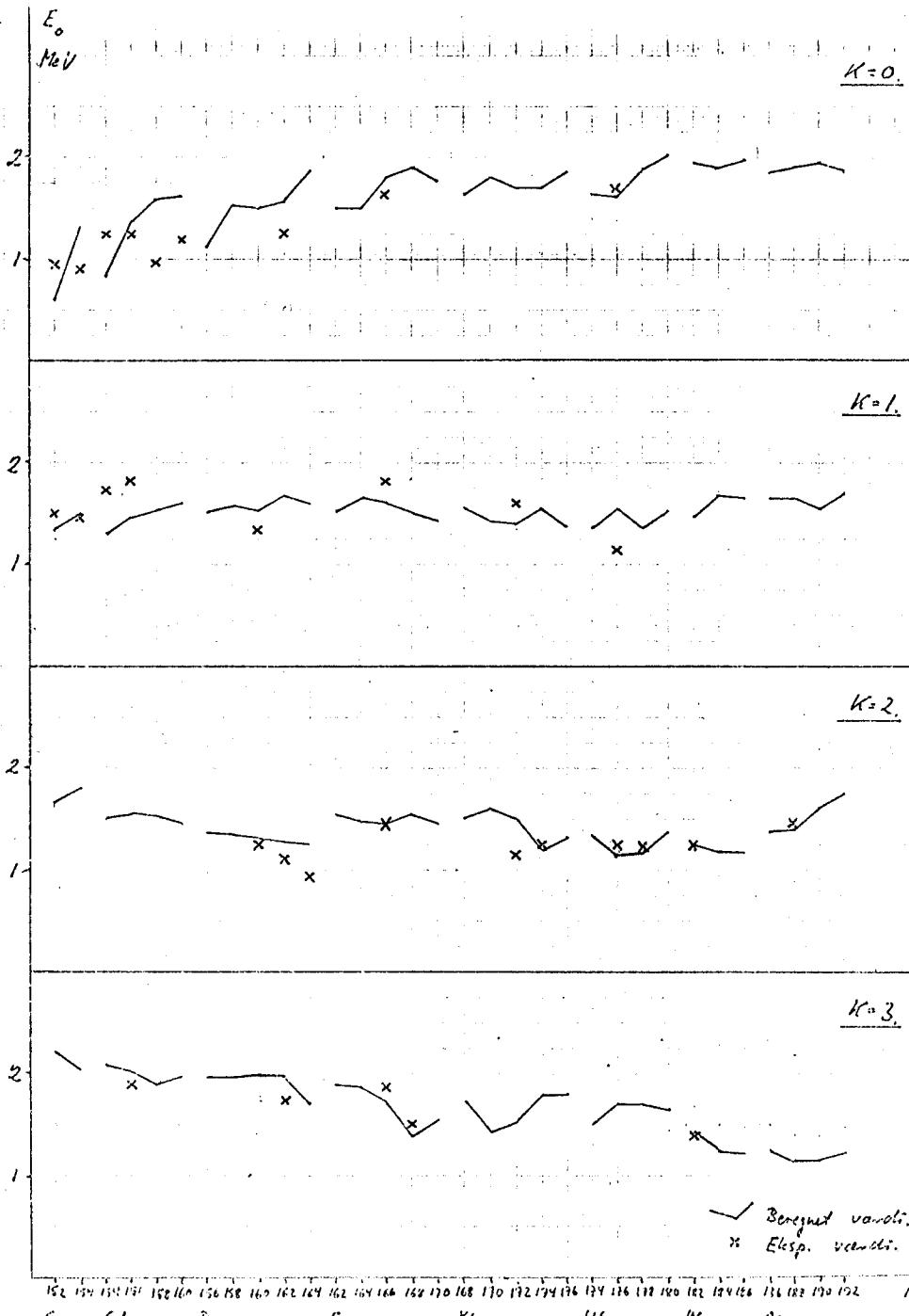


Fig. 40. Laveste indre oktupolniveau for hver af de fire K-værdier.  
 Eksperimentelle værdier fra tabel 2 med et enkelt tilføjet K=3 - niveau i  $Dy^{162}$  (henv. 30).

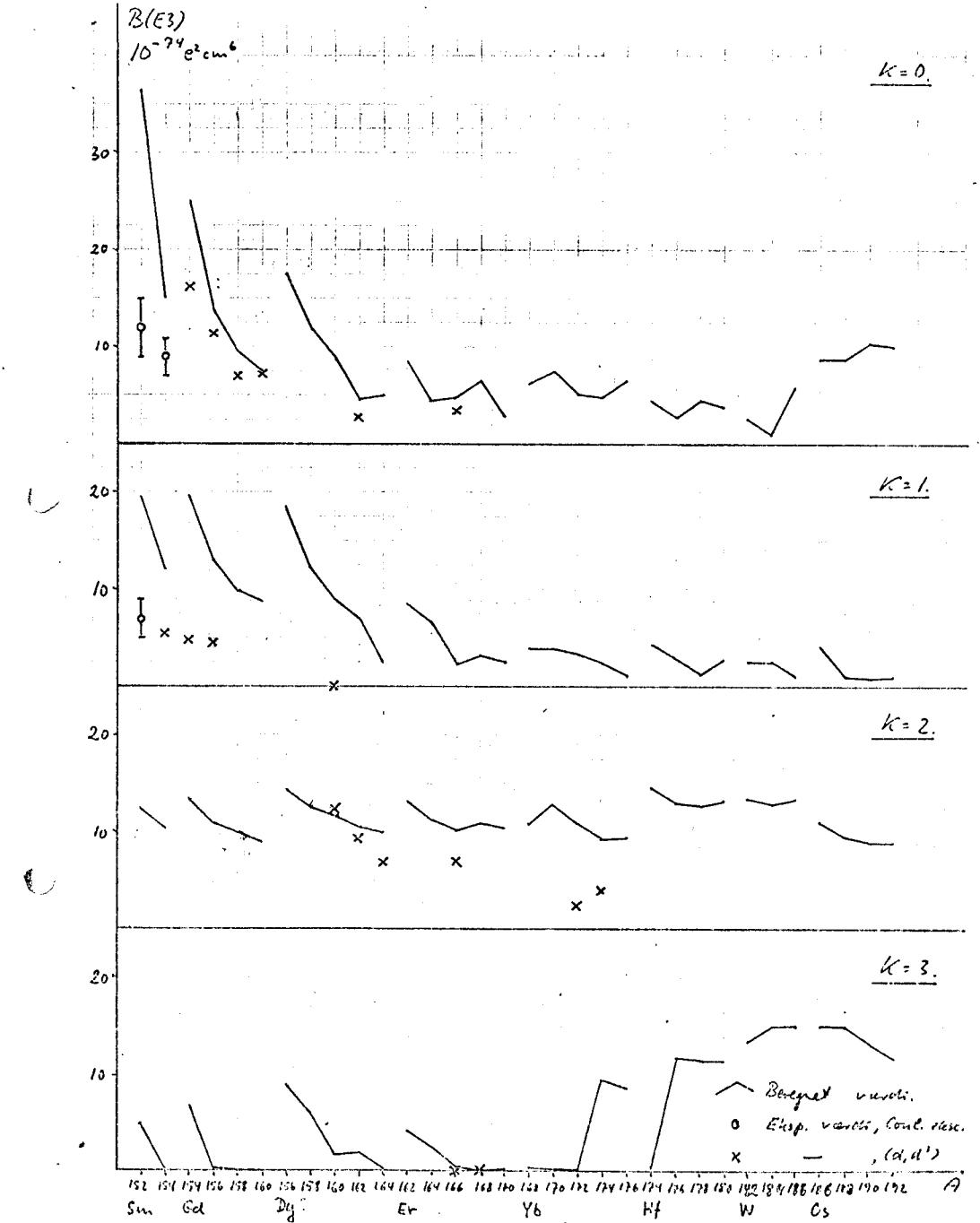


Fig. 41.  $B(E3)$  - værdier svarende til niveauerne i fig. 40. Eksperimentelle værdier fra henv. 24 - 28.

$B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{ cm}^5$  $\text{Er}^{166}, K=2$ 

$$\chi_0 = 69.5 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $4.3$   
 $-0.9$ 

$$\chi_0 = 67.5 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $3.7$   
 $-0.7$  $\text{Dy}^{160}, K=3$ 

$$\chi_0 = 67 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $3.6$   
 $-0.7$ 

$$\chi_0 = 65 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $2 - 0.5$  $E_\gamma \text{ MeV}$ 

Fig. 42. Eksempler på de beregnede spektres afhængighed af  $\chi_0$ . Øvrige parametre som i fig. 8 - 39.

 $B(E3)$  $10^{-24} e^2 \text{ cm}^5$ 

$$G_p = \frac{30}{A} \text{ MeV}, G_n = \frac{27}{A} \text{ MeV}$$

$$\Delta_p = 0.88 \text{ MeV}, \Delta_n = 0.85 \text{ MeV}$$

$$\chi_0 = 69.4 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $4.5$   
 $-0.8$ 

$$G_p = \frac{30}{A} \text{ MeV}, G_n = \frac{25}{A} \text{ MeV}$$

$$\Delta_p = 0.88 \text{ MeV}, \Delta_n = 0.67 \text{ MeV}$$

$$\chi_0 = 68.0 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $3.8$   
 $-0.8$ 

$$G_p = \frac{32}{A} \text{ MeV}, G_n = \frac{25}{A} \text{ MeV}$$

$$\Delta_p = 1.05 \text{ MeV}, \Delta_n = 0.67 \text{ MeV}$$

$$\chi_0 = 68.5 \text{ fm}^{-3} \text{ MeV}$$

 $4.0$   
 $-0.8$  $G_\gamma$  $\text{MeV}$ 

Fig. 43.  $K=2$  - spektret af  $\text{Er}^{166}$  med forskellige værdier af  $G_p$  og  $G_n$ .  $\chi_0$  er valgt således, at det laveste niveau ligger ved 1.45 MeV.  $a = 0.5$ .

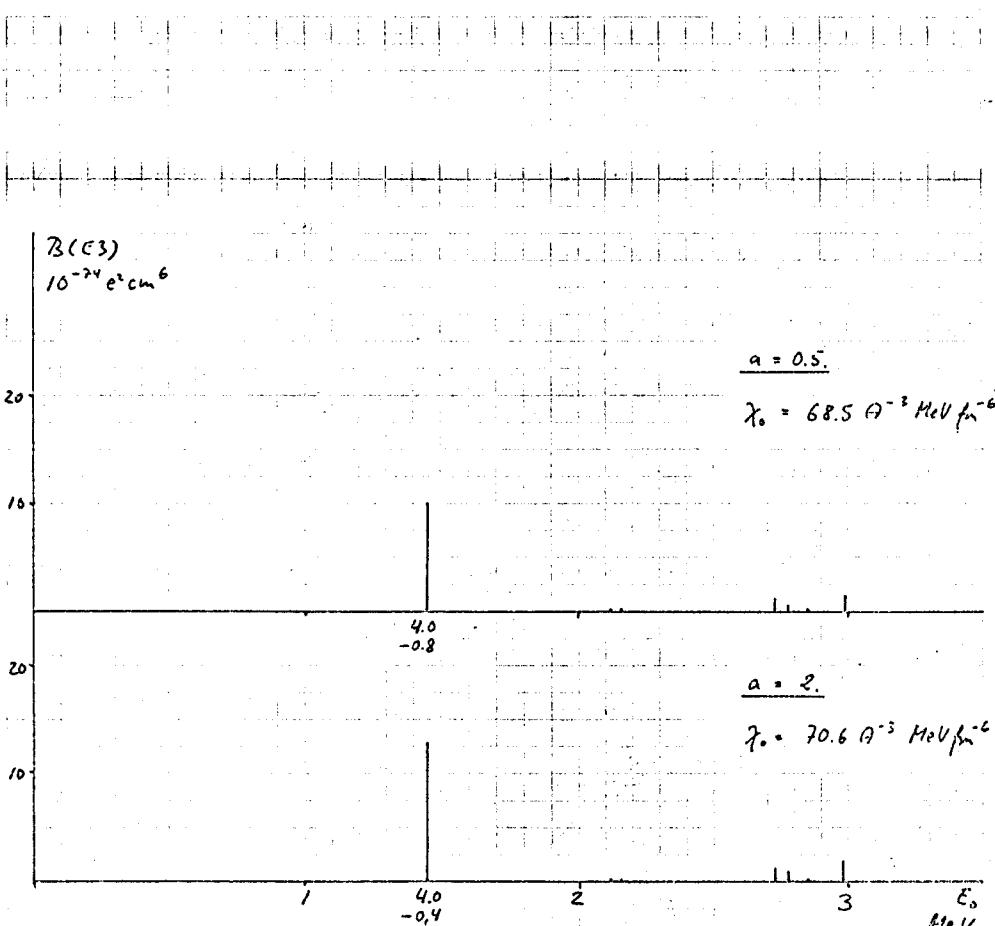


Fig. 44. K=2-spektret af  $\text{Er}^{166}$  med henholdsvis  $a = 0.5$  og  $a = 2$ .  $\chi_0$  er valgt, så det laveste niveau ligger ved 1.45 MeV.  $G_p = 30/\Lambda \text{ MeV}$ ,  $G_m = 25.5/\Lambda \text{ MeV}$ .

## 9. Tillæg.

### A. Poler og residuer af $\underline{\underline{G}}(E)$ .

Jeg indfører funktionerne

$$\underline{\underline{F}}(\gamma) = \underline{\underline{G}}(\sqrt{\gamma}), \quad (81)$$

$$\underline{\underline{F}}^{(o)}(\gamma) = \underline{\underline{G}}^{(o)}(\sqrt{\gamma}),$$

og

$$\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) = \underline{\underline{G}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\sqrt{\gamma}). \quad (82)$$

(55) kan da skrives som

$$\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma_{\alpha\beta} \\ t_2(\gamma) = t_1(\gamma)}} \frac{R_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha\beta} - \gamma}, \quad (83)$$

hvor  $\gamma_{\alpha\beta} = (E_\alpha + E_\beta)^2$  og

$$R_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{E_\gamma + E_\delta = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta}} \\ t_2(\gamma) = t_2(\gamma)}} (E_\gamma + E_\delta)(u_\gamma v_\beta + v_\gamma u_\beta)^2 \times |\langle \gamma | Y_{3/2}(\hat{r}) | \beta \rangle|^2. \quad (84)$$

(54) kan skrives

$$\underline{\underline{F}}^{(o)}(\gamma) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) + \underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) & \underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) - \underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) \\ \underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) - \underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) & \underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) + \underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (85)$$

hvoraf

$$\underline{\underline{F}}^{(o)}(\gamma)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} + \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} & \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} - \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} \\ \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} - \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} & \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} + \frac{1}{\underline{\underline{F}}_{-\frac{1}{2}}^{(o)}(\gamma)} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Defineres funktionerne  $\bar{F}_{t_i}(\gamma)$  ved ligningen

$$\frac{1}{\bar{F}_{t_i}(\gamma)} = \frac{1}{\bar{F}_{t_i}^{(o)}(\gamma)} - 2\chi_i, \quad (87)$$

følger

$$\begin{aligned} \bar{F}_{t_i}^{(o)}(\gamma) &= \chi_i \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{\bar{F}_i(\gamma)} + \frac{1}{\bar{F}_{-i}(\gamma)} - 4(\chi_0 - \chi_i) & \frac{1}{\bar{F}_i(\gamma)} - \frac{1}{\bar{F}_{-i}(\gamma)} \\ \frac{1}{\bar{F}_i(\gamma)} - \frac{1}{\bar{F}_{-i}(\gamma)} & \frac{1}{\bar{F}_i(\gamma)} + \frac{1}{\bar{F}_{-i}(\gamma)} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (88)$$

hvoraf

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\pm}(\gamma) &= (\bar{F}_{\pm}^{(o)}(\gamma) - \chi_i)^{-1} \\ &= \begin{cases} \bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma) & \bar{F}_i(\gamma) - \bar{F}_{-i}(\gamma) \\ \bar{F}_i(\gamma) - \bar{F}_{-i}(\gamma) & \bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma) - 4(\chi_0 - \chi_i) \bar{F}_i(\gamma) \bar{F}_{-i}(\gamma) \end{cases} \quad (89) \\ &= \frac{\bar{F}_i(\gamma) - \bar{F}_{-i}(\gamma) \quad \bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma) - 4(\chi_0 - \chi_i) \bar{F}_i(\gamma) \bar{F}_{-i}(\gamma)}{1 - (\chi_0 - \chi_i) (\bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma))}. \end{aligned}$$

Polerne af  $\bar{F}_{\pm}(\gamma)$  er således givet ved ligningen

$$\bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma) = \frac{1}{\chi_0 - \chi_i}. \quad (90)$$

Tages residuet af (89) og elimineres  $\chi_0 - \chi_i$  ved hjælp af (90), finder man endvidere

$$\text{Res } \bar{F}_{\pm}(\gamma_m) = - \frac{1}{\bar{F}_i'(\gamma_m) + \bar{F}_{-i}'(\gamma_m)} \begin{pmatrix} \bar{F}_i(\gamma_m) + \bar{F}_{-i}(\gamma_m) \\ \bar{F}_i(\gamma_m) - \bar{F}_{-i}(\gamma_m) \end{pmatrix} \quad (91)$$

Polerne af  $\underline{G}(E)$  er givet ved

$$\times (\bar{F}_i(\gamma_m) + \bar{F}_{-i}(\gamma_m) \bar{F}_i(\gamma_m) - \bar{F}_{-i}(\gamma_m)).$$

$$E_m = \sqrt{\gamma_m}, \quad (92)$$

og af

$$\text{Res } \underline{G}(E_m) = \frac{1}{2E_m} \text{ Res } \bar{F}(E_m^2) \quad (93)$$

og (91) følger derfor med de i afsnit 3 indførte betegnelser

$$\langle m | B_0 | o \rangle = \frac{\frac{1}{2} (\bar{F}_i(\gamma) + \bar{F}_{-i}(\gamma))}{\sqrt{2 E_m (\bar{F}_i'(\gamma_m) + \bar{F}_{-i}'(\gamma_m))}},$$

$$\langle m | B_1 | o \rangle = \frac{\frac{1}{2} (\bar{F}_i(\gamma) - \bar{F}_{-i}(\gamma))}{\sqrt{2 E_m (\bar{F}_i'(\gamma) + \bar{F}_{-i}'(\gamma))}},$$

$$\langle m | B_E | o \rangle = \frac{\bar{F}_i(\gamma)}{\sqrt{2 E_m (\bar{F}_i'(\gamma) + \bar{F}_{-i}'(\gamma))}}.$$

$\bar{F}_{t_i}(\gamma)$  har formen

$$\bar{F}_{t_i}(\gamma) = \sum_m \frac{R_{t_i,m}}{\gamma_{t_i,m} - \gamma}, \quad (95)$$

hvor  $\gamma_{t_i,m}$  betegner rødderne i ligningen

$$\bar{F}_{t_i}^{(o)}(\gamma_{t_i,m}) = \frac{1}{2\chi_i}, \quad (96)$$

og

$$R_{t_i,m} = - \frac{\bar{F}_{t_i}^{(o)}(\gamma_{t_i,m})^2}{\bar{F}_{t_i}^{(o)\prime}(\gamma_{t_i,m})}. \quad (97)$$

$\bar{F}_{t_i}^{(o)}(\gamma)$  og  $\bar{F}_{t_i}^{(o)\prime}(\gamma)$  ses umiddelbart af (83) og (95) at være givet ved

$$F_{t_2}^{(o)}(\gamma) = \sum_{\eta_{\gamma\gamma}} \frac{R_{\eta\eta}}{(\eta_{\gamma\gamma} - \gamma)^2} \quad (98)$$

$t_2(n) = t_2$

og

$$F_{t_2}'(\gamma) = \sum_m \frac{R_m}{(\eta_{\gamma\gamma} - \gamma)^2} \quad (99)$$

Det fremgår, at bestemmelsen af polerne af  $\underline{G}(E)$  er reduceret til en succesiv løsning af den endimensionale dispersionsligning (90) eller (96).

### B. Matrixelementer mellem oscillatorstilstande.

Basistilstandene i oscillatorrepresentationen er - foruden ved  $t_2$  - karakteriseret ved antallene af oscillatorkvante  $m_+$ ,  $m_0$  og  $m_-$ , og spinkomponenten  $s_0$ . Banneimpulsmomentets aksiale komponent er givet ved

$$\ell_0 = m_+ - m_- , \quad (100)$$

og tilstanden har

$$K = \ell_0 + s_0 = m_+ - m_- + s_0 . \quad (101)$$

Nilssontilstandene opnås ved at diagonalisere  $H_N$  i underrum karakteriseret ved  $K$  og det samlede antal af oscillatorkvante

$$N = m_+ + m_0 + m_- , \quad (102)$$

$N$  og  $K$  fastlægger basistilstandene sammen med  $m_0$ , idet (101) og (102) entydigt bestemmer  $m_+$ ,  $m_-$  og  $s_0$ , når  $m_+$  og  $m_-$  er heltallige, og  $s_0$  har værdierne  $\pm \frac{1}{2}$ .

Matrixelementerne af en analytisk funktion af stedkoordinaterne kan beregnes ved at udtrykke de enkelte koordinater ved skabelses- og annihilationsooperatorerne for oscillatorkvante -

$$r_\mu = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (c_\mu^+ + (-1)^\mu c_{-\mu}) . \quad (103)$$

( $\omega_+ = \omega_- = \omega_0$ ) - og reducere det derved fremkomne udtryk med anvendelse af Wick's teorem. Regnes længderne i Nilsson-enheden  $\sqrt{\hbar/4m\omega}$ , og benyttes den sædvanlige fasekonvention

$$\langle m_\mu + 1 | c_\mu^+ | m_\mu \rangle = \sqrt{m_\mu + 1} , \quad (104)$$

finder man for matrixelementerne af funktionerne  $\hat{Y}_{3\mu}(\vec{r})$ :

$$\langle N+1, m_0-1 | \hat{Y}_{30} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{63}{32\pi}} m_0 (m_1+1)(m_{-1}+1),$$

$$\langle N+1, m_0+1 | \hat{Y}_{30} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{63}{32\pi} (m_0+1)} \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} (m_1+1) - N+m_0 - 1 \right),$$

$$\langle N+3, m_0+1 | \hat{Y}_{30} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{63}{32\pi} (m_0+1)(m_1+1)(m_{-1}+1)},$$

$$\langle N+3, m_0+3 | \hat{Y}_{30} | Nm_0 \rangle = \frac{\omega_1}{\omega_0} \sqrt{\frac{7}{32\pi} (m_0+1)(m_0+2)(m_0+3)},$$

$$\langle N+1, m_0 | \hat{Y}_{31} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{21}{16\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1} (m_1+1)} \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} (2m_0+1) - \frac{1}{2} m_1 - m_{-1} - 1 \right),$$

$$\langle N+1, m_0+2 | \hat{Y}_{31} | Nm_0 \rangle = - \sqrt{\frac{21}{16\pi} \frac{\omega_1}{\omega_0} (m_0+1)(m_0+2)m_{-1}},$$

$$\langle N+3, m_0 | \hat{Y}_{31} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{21}{64\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1} (m_1+1)(m_1+2)(m_{-1}+1)},$$

$$\langle N+3, m_0+2 | \hat{Y}_{31} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{21}{16\pi} \frac{\omega_1}{\omega_0} (m_0+1)(m_0+2)(m_1+1)},$$

$$\langle N+1, m_0-1 | \hat{Y}_{32} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{105}{64\pi}} m_0 (m_1+1)(m_1+2),$$

$$\langle N+1, m_0+1 | \hat{Y}_{32} | Nm_0 \rangle = - \sqrt{\frac{105}{16\pi}} (m_0+1)(m_1+1)m_{-1},$$

$$\langle N+3, m_0+1 | \hat{Y}_{32} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{105}{64\pi}} (m_0+1)(m_1+1)(m_1+2),$$

$$\langle N+1, m_0 | \hat{Y}_{33} | Nm_0 \rangle = - \sqrt{\frac{315}{64\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1}} (m_1+1)(m_1+2)m_{-1},$$

$$\langle N+3, m_0 | \hat{Y}_{33} | Nm_0 \rangle = \sqrt{\frac{35}{64\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1}} (m_1+1)(m_1+2)(m_1+3).$$

Der er her underforstået  $K' - K = \mu$ . (Mørkede kvante- tal refererer til tilstanden til venstre i udtrykket for matrixelementet.) Matrixelementerne for  $\mu < 0$  og  $N' < N$  fremgår ved tidsomvending og komplekskonjugation. Andre matrixelementer end de derved fremkomne bliver nul.

Matrixelementerne af  $\hat{Y}_{3\mu}(\vec{r})$  opnås ved at ombytte tæller og nævner i alle brøker  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ , som forekommer i (105). Dette følger umiddelbart af (36) og (103).

Det er muligt med anvendelse af den nævnte teknik at udlede et alment udtryk for matrixelementerne af en funktion

$r^{2\alpha} Y_{3\mu}(\vec{r})$ . (Disse funktioner udspander rummet af analytiske funktioner.  $\alpha$  betegner et ikke-negativt, helt tal.) Resultatet er følgende:

$$\langle m'_0 m' m_{-1} s'_0 | r^{2\alpha} Y_{3\mu}(\vec{r}) | m_0 m_1 m_{-1} s_0 \rangle$$

$$= \delta_{s'_0 s_0} \delta_{\Delta m_1 - \Delta m_{-1}, \mu} \frac{1}{2} (1 + (-1)^{\lambda + \Delta N})$$

$$\times (-1)^{\frac{1}{2} (\lambda - \Delta N + \Delta m_0 - 1 \Delta m_1)}$$

$$\times \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2} \Delta m_0} - \frac{1}{6} (\lambda + 2\alpha)$$

$$\times z^{-\lambda} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(\lambda+\alpha)!(\lambda-\mu)!}{4\pi}}$$

$$\times \sqrt{\prod_{v=-1}^1 \frac{\max(m_v, m'_v)!}{\min(m_v, m'_v)!}}$$

(106)

$$x \sum_{\nu=-1}^{\nu} (-1)^{i_\nu} \left( \frac{\omega_\nu}{\omega_0} \right)^{\nu} c(2i_\nu + 1 \Delta m_\nu, \sigma)$$

$$\sum_{\nu=-1}^{\nu} i_\nu = \frac{1}{2} (\lambda + 2\sigma - \sum_{\nu=-1}^{\nu} 1 \Delta m_\nu)$$

$i_\nu, i_\nu, i_\nu \geq 0$

$$x \prod_{\nu=-1}^{\nu} f(m_\nu, m'_\nu, 1 \Delta m_\nu, i_\nu),$$

hvor

$$c(i, \sigma) = 2^{\frac{i}{2}} \sum_j (-1)^j \frac{\sigma! i! \left(\frac{\lambda+m-i}{2} + \sigma\right) \left(\frac{\lambda-m-i}{2} + \sigma\right)!}{2^j j! (\sigma-j)! (i-2j)! \left(\frac{\lambda+m-i}{2} + j\right) \left(\frac{\lambda-m-i}{2} + j\right)!},$$

$$f(m, \Delta m, i) = \sum_j \frac{m!}{2^j j! (i-j)! (i+\Delta m-j)! (m-i+j)!},$$

$$\Delta m_\nu = m'_\nu - m_\nu,$$

$$\Delta N = N' - N.$$

Som ovenfor er længderne regnet i Nilsson-enheden.

Matrixelementerne af  $r^{2\alpha} Y_{lm}(\hat{r})$  opnås også her ved at ombytte tallene og nævnerne i brøkerne  $\frac{\omega_\nu}{\omega_0}$ .

(105) kan udledes som specialtilfælde af (106).

Litteraturhenvisninger:

- 1) V. G. Soloviev, At. Ener. Rev. 3 (1965) 117.
- 2) V. G. Soloviev og P. Vogel, Phys. Lett. 6 (1963) 126.
- 3) V. G. Soloviev, P. Vogel og A. A. Korneichuk, Dubna publ. E-1561 (1964).
- 4) P. Vogel, Dubna publ. E-1703 (1964).
- 5) L. A. Malov, V. G. Soloviev og U. M. Fainer, Dubna publ. D-3893 (1968) 78.
- 6) A. Faessler og A. Plastino, Z. Phys. 203 (1967) 333.
- 7) A. Plastino, A. Faessler og S. A. Moszkowski, Bull. Am. Phys. Soc. 11 (1966) 320.
- 8) A. Faessler og A. Plastino, Nucl. Phys. A94 (1967) 580.
- 9) A. Faessler og A. Plastino, Nuovo Cim. 48B (1967) 429.
- 10) C. J. Veje, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 35, 1 (1966).
- 11) A. Bohr og B. R. Mottelson, Lectures on Nuclear Structure and Energi Spectra (under udgivelse).
- 12) G. E. Brown, Lectures on Many-Body Problems (NORDITA), København 1966/67
- 13) B. L. Birbrair, Nucl. Phys. A108 (1968) 449.
- 14) C. Gustafson, I. L. Lamm, B. Nilsson og S. G. Nilsson, Arkiv för Fysik 36 (1967) 613.
- 15) S. G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29, 16 (1955).
- 16) B. R. Mottelson, NORDITA publ. 20 (1959).
- 17) A. M. Lane, Nuclear Theory (Benjamin, New York - Amsterdam 1964).
- 18) D. F. Petersen og C. J. Veje, Phys. Lett. 24B (1967) 449.
- 19) J. Řízek og P. Vogel, Česk. Akad. Ústav Jad. Výz. 2024 (1968).
- 20) O. Nathan og S. G. Nilsson, Collective Nuclear Motion and Unified Model, i Alpha, Beta and Gamma Ray Spectroscopy, udg. Kai Siegbahn (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964).
- 21) S. G. Nilsson og O. Prior, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 32, 16 (1961).

- 22) B. Elbek, disputats (Munksgaard, København 1963).
- 23) C. M. Lederer, J. M. Hollander og I. Perlman, Table of Isotopes (John Wiley and Sons, New York - London - Sydney 1967).
- 24) E. Veje, B. Elbek, B. Herskind og M. C. Olesen, Nucl. Phys. A109 (1968) 489.
- 25) R. Bloch, B. Elbek og P. O. Tjørn, Nucl. Phys. A91 (1967) 576.
- 26) T. Grotdal, K. Nybø, T. Thorsteinsen og B. Elbek, Nucl. Phys. A110 (1968) 385.
- 27) P. O. Tjørn og B. Elbek, Nucl. Phys. A107 (1968) 385.
- 28) D. G. Burke og B. Elbek, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 36, 6 (1967).
- 29) O. Nathan og M. Waggoner, Nucl. Phys. 2 (1957) 548.
- 30) A. Bäcklin et al., Phys. Rev. 169 (1967) 1011.
- 31) G. G. Staehle og M. L. Pool, Bull. Am. Phys. Soc. 9 (1964) 718.
- 32) K. M. Bisgaard, K. B. Nielsen og J. Sodemann, Phys. Lett. 2 (1963) 57.
- 33) G. Hansen, Risø Report 92 (1964).
- 34) F. Boehm og J. Rogers, Nucl. Phys. 41 (1963) 553.
- 35) O. W. B. Schultz, Y. Gruber, B. P. Maier og F. W. Staneck, Z. Phys. 180 (1961) 298.
- 36) J. Zylicz, M. M. Jørgensen, O. B. Nielsen og O. Skilbreid, Nucl. Phys. 81 (1966) 88.
- 37) R. Casten, privat kommunikation.
- 38) B. Harmatz, T. H. Handley og J. W. Mihelich, Phys. Rev. 121 (1961) 1758.
- 39) H. Koch, Z. Phys. 192 (1966) 142.
- 40) C. J. Gallagher, jr. og V. G. Soloviev, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 2, 2 (1962).
- 41) T. Thorsteinsen, privat kommunikation.
- 42) B. Elbek, T. Grotdal, K. Nybø, P. O. Tjørn og E. Veje, rapport til Tokio-konferencen 1967.